Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.46

Дмитриюс Кирьяцкис

СИСТЕМЫ ЧЕБЫШЕВА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности
«01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Гродно, 2013

Работа выполнена в учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Научный руководитель:

Вувуникян Юрий Микиртычевич,
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Официальные оппоненты:

Зверович Эдмунд Иванович,
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета;

Расулов Карим Магомедович,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета

Оппонирующая организация:

учреждение образования
«**Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины**»

Защита состоится 18.10.2013 в 12.00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209
Телефон ученого секретаря: (+375 152) 74 43 76; (+375 152) 73 19 26
E–mail: v.a.pronko@gmail.com; n.nech@grsu.by

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГрГУ им. Я. Купалы.
Автореферат разослан «_____» ____________ 2013 г.

Учёный секретарь
совета по защите диссертаций К 02.14.02 В.А. Пронько

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Среди функций, образующих линейные пространства, можно выделить различные системы функций, обладающие теми или иными свойствами.

Одной из таких систем является введенная П.Л. Чебышевым система, которая впоследствии стала носить его имя. Термин «Система Чебышева» впервые был введён С.Н. Бернштейном в 1937 году.

Пусть B – множество, содержащее не менее $n+1$ точек и $u_0(z),\dots,u_n(z)$ – система функций, заданных на множестве B. Эта система называется *системой Чебышева* (сокращенно $T_n(B)$) на множестве B, если любой обобщенный многочлен $P_n(z)=c_0u_0(z)+\dots+c_nu_n(z)$ (случай $c_0=\dots=c_n=0$ исключается) имеет не более n различных корней.

В научных работах чаще всего рассматривают системы Чебышева, образованные непрерывными на отрезке вещественными функциями, а также системы, образованные аналитическими в области функциями комплексной плоскости.

Системы Чебышева встречаются во многих областях математического анализа, особенно в теории аппроксимации и в теории интерполяции. Здесь фундаментальную роль в свое время сыграли работы К. Вейерштрасса, П.Л. Чебышева, С.Н. Бернштейна. С различными свойствами систем Чебышева в пространстве действительных функций можно познакомиться, например, по известным книгам М.Г. Крейна, А.А. Нудельмана и С. Карлина, В. Стаддена.

Параллельно с обилием важнейших результатов, полученных с помощью систем Чебышева в пространстве действительных функций, появилось достаточно много результатов, полученных с помощью систем Чебышева в пространстве аналитических функций. Здесь основное внимание уделялось вопросам наилучшего приближения многочленами и рациональными функциями. В этом направлении отметим, например, статьи В.С. Виденского, А.Г. Витушкина, А.Н. Колмогорова, А.А. Маркова, Е.А. Ремеза, а также монографии В.И. Дзядыка, А.О. Гельфонда, И.И. Ибрагимова, В.К. Смирнова и Н.А. Лебедева, П.М. Тамразова, Дж.Л. Уолша.

Пусть $A(D)$ – класс аналитических в области D функций. Хорошо известно следующее классическое определение однолистной в области D функции: функция $f(z)$ из класса $A(D)$ называется однолистной в этой области, если $f(z_0)\neq f(z_1)$ для любых различных $z_0, z_1 \in D$.

Свойствам однолистных функций посвящено большое число монографий и научных статей. Отметим монографии И.А. Александрова, Дж.А. Дженкинса, Г.М. Голузина, Н.А. Лебедева, И.М. Милина.

Как будет видно из дальнейшего, полезно иметь и другие эквивалентные между собой определения однолистной функции.

Функцию $f(z)$ назовем однолистной в области D, если она принимает в этой области одно и то же значение не более одного раза.

Функцию $f(z)$ назовем однолистной в области D, если первая разделенная разность

$$\left[f(z); z_0, z_1\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)(\xi - z_1)} \neq 0$$

(Γ – простой замкнутый контур, охватывающий точки z_0, z_1) для любых различных точек $z_0, z_1 \in D$.

Отметим несколько путей, ведущих к обобщению понятия однолистной функции.

Назовем функцию $f(z)$ многолистной (n - листной) в области D, если она одно и то же значение принимает не более чем в n точках. Этот путь приводит нас к одному из важных разделов теории функций комплексного переменного – теории многолистных функций. Здесь отметим известную монографию В.К. Хеймана «Многолистные функции».

К однолистным и многолистным функциям можно придти также следующим образом. Функция $f(z)$ является n - листной в области D тогда и только тогда, когда любой обобщенный многочлен вида $P_1(z) = c_0 \cdot 1 + c_1 f(z)$ (случай $c_0 = c_1 = 0$ исключается) имеет в области D не более n различных корней. В частности, если $n = 1$, то функция $f(z)$ является однолистной в области D тогда и только тогда, когда система функций $1, f(z)$ является системой Чебышева в области D. Значит, естественным образом вводится класс $K_n(D)$ функций $f(z)$, для которых система функций $1, z, \ldots, z^{n-1}, f(z)$ является системой Чебышева в области D. Класс $K_n(D)$ является собственным подклассом класса n- листных в области D функций. Класс $K_1(D)$ состоит из всех однолистных в области D функций. Отметим существование однолистных в области D функций, принадлежащих одновременно всем классам $K_n(D)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Введем класс аналитических в области D функций $f(z)$, обладающих следующим свойством:

$$\left[f(z); z_0, \ldots, z_n\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)(\xi - z_1)\ldots(\xi - z_n)} \neq 0,$$

($\Gamma -$ простой замкнутый контур, охватывающий точки $z_0, z_1, ..., z_n$) для попарно различных $z_0, z_1, ..., z_n \in D$. Этот класс полностью совпадает с классом $K_n(D)$. Левая часть последнего равенства служит обозначением разделенной разностью n - го порядка функции $f(z)$.

Наряду с системой функций $1, z, ..., z^{n-1}, f(z)$ в данной диссертации рассматривается более общая система аналитических в области D функций $u_0(z), ..., u_n(z)$, образующих систему $T_n(D)$. Изучены свойства чебышевских систем, определенных на различных классах аналитических в области D функций. Показана их тесная связь с однолистными функциями, с многолистными функциями, а также с разделенными разностями различных порядков.

Сформулированы и доказаны теоремы, позволяющие судить о том, является ли данная система функций чебышевской в некоторой области D. Установлен вид функций, образующих систему Чебышева в расширенной комплексной области с выколотыми точками. Даются достаточно много примеров систем Чебышева в конечных и неограниченных областях.

Сформулированы свойства введенного разностного определителя, элементами которого являются разделенные разности различных порядков. Указана тесная связь этого разностного определителя с системой $T_n(D)$.

Изучены свойства однородного линейного дифференциального уравнения $n-$ го порядка, фундаментальная система решений которого является системой $T_n(D)$. Получены условия, налагаемые на коэффициенты данного однородного линейного дифференциального уравнения, согласно которым оно будет чебышевского типа. Дано много примеров фундаментальных систем, являющихся системами $T_n(D)$.

Рассматривается аналитическая в круге $|z| < R$ функция, которая удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению n–го порядка с числовыми коэффициентами и специальным начальным условиям Коши. Изучается поведение коэффициентов этой функции в зависимости от расположения корней характеристического многочлена.

Ставится и решается вопрос об изолированных особенностях функций, образующих систему $T_n(D)$ в области D с выколотыми точками. Дано одно из возможных обобщений трансфинитного диаметра, связанного с чебышевской системой. Приводятся некоторые метрические свойства периодических множеств на плоскости.

Из выше изложенного видно, что в данной диссертации ставилась задача изучения внутренних свойств систем Чебышева, образованных функциями из класса $A(D)$, с последующим применением их к вопросам, относящимся к однолистным и многолистным функциям, к линейным однородным дифференциальным уравнениям, к разделенным разностям и к алгебраическим и трансцендентным уравнениям, а также к метрическим свойствам периодических множеств на плоскости.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Работа над диссертацией проводилась в соответствии с заданиями научных тем, выполнявшихся в рамках Государственной программы научных исследований «Исследование качественных и количественных свойств отображений абстрактных пространств. Рациональные приближения функций действительного и комплексного переменных» (срок выполнения 2011–2015 гг., номер гос. регистрации – 20120673).

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является получение свойств функций, образующих систему $T_n(D)$, их связи с разделенными разностями высших порядков и с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для этого были рассмотрены и решены следующие задачи:

1. Доказать теорему об обобщенном многочлене Чебышева в случае кратных корней. Установить теорему о равномерной сходимости последовательности, составленной из обобщенных многочленов Чебышева. Указать на свойства функций, образующих систему $T_n(D)$ в области D с выколотыми точками. Привести теорему о виде обобщенного многочлена Чебышева в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками.

2. Дать оценку модуля k-й производной аналитической в области D функции, имеющей нули в этой области с помощью разделенных разностей. Получить условия, налагаемые на коэффициенты данного линейного дифференциального уравнения, согласно которым оно будет чебышевского типа. С помощью разностного определителя дать необходимое и достаточное условие, чтобы данное линейное однородное дифференциальное уравнение было чебышевского типа. Выразить коэффициенты функции, удовлетворяющей линейному однородному дифференциальному уравнению и начальным условиям

Коши, через разделенные разности и установить свойства этих коэффициентов в угловой области.

3. Получить свойства разностного определителя в случае произвольного расположения точек в области. С помощью определителя Вронского дать необходимое и достаточное условие, чтобы система функций была локально чебышевской. Предложить одно возможное обобщение константы Чебышева и трансфинитного диаметра. Изучить метрические свойства 2π – периодических множеств на комплексной плоскости с помощью чисел Фекете и констант Чебышева.

Объект исследования – последовательность аналитических в комплексной области функций, образующих систему Чебышева.

Предмет исследования – свойства функций, образующих систему Чебышева, их связи с разделенными разностями высших порядков и с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Положения, выносимые на защиту

1. Теоремы об обобщенном многочлене Чебышева в случае кратных корней, о равномерном пределе последовательности обобщенных многочленов Чебышева и о виде обобщенного многочлена Чебышева в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками.

2. Оценка модуля k- й производной аналитической в области D функции, имеющей нули в этой области с помощью разделенных разностей. Теорема об условиях, налагаемых на коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения, при выполнении которых это уравнение будет чебышевского типа. Необходимое и достаточное условия того, что линейное однородное дифференциальное уравнение будет уравнением чебышевского типа, выраженные с помощью разностного определителя. Теорема о расположении и числе корней в угловой области характеристического многочлена линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Теорема о коэффициентах функции, удовлетворяющей линейному однородному дифференциальному уравнению и специальным начальным условиям Коши.

3. Теорема о разностном определителе в случае произвольного расположения точек в области. Необходимое и достаточное условия того, чтобы данная система функций была локально чебышевской, выраженные с помощью определителя Вронского. Теорема, обобщающая теорему Фекете о трансфинитном диаметре и константе Чебышева. Метрические свойства 2π – периодических множеств на плоскости.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты диссертации получены лично соискателем. Научный руководитель участвовал в выборе методов исследования и обсуждении научных результатов.

Апробация результатов диссертации

Результаты докладывались на следующих международных конференциях и семинарах:

1. V-ая Международная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (16–19 мая 2003 г., Смоленск, Россия);
2. Международная конференция «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (4–9 сентября 2003 г., Минск, Беларусь);
3. XLVI-ая конференция Института математики и информатики (23 июня 2004 г., Вильнюс, Литва);
4. IX-ая Белорусская международная математическая конференция (3–6 ноября 2004 г., Гродно, Беларусь);
5. VI-ая Международная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (15 –17 мая 2005 г., Смоленск, Россия);
6. VII-ая Международная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (15 –17 мая 2006 г., Смоленск, Россия);
7. XII-ая Международная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (15 –17 мая 2011 г., Смоленск, Россия);
8. VI-ая международная конференция «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (12–17 сентября 2011 г., Минск, Беларусь);
9. Международная конференция «Понтрягинские чтения – XXIII» (3–9 мая 2012 г., Воронеж, Россия);
10. XIII-ая Международная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (15 –17 мая 2012 г., Смоленск, Россия);
11. Семинар «Избранные задачи математического анализа (Руководитель В.И. Матюхин) (19 октября и 24 ноября 2012 г., Вильнюс, Литва);
12. XIVI-ая Международная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (17 –19 мая 2013 г., Смоленск, Россия).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, из которых 5 – статьи в научных изданиях, соответствующих п.18 «Положения о присуждении ученых степеней и ученых званий в Республике Беларусь» (общим объемом 0,92 авт. л.), 3 – статьи в других научных журналах, 6 материалов международных конференций.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и библиографического списка, содержащего 59 наименований (включая 14 публикаций соискателя). Общий объем диссертации составляет 105 страниц, из них 5 страниц занимает библиографический список.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава «Обзор литературы по теме исследования. Методы и результаты» носит вспомогательный характер. В ней дается краткий обзор литературы по теме диссертации, приводятся необходимые сведения о системах Чебышева, разделенных разностях, обсуждаются простейшие вопросы по теории аппроксимации и интерполяции.

Заметим, что в некоторых случаях для сравнения полученных автором результатов рассматривается класс $A^n(a,b)$ непрерывных в интервале (a,b) действительных функций, имеющих непрерывные производные до n порядка включительно.

Вторая глава «Разделенные разности и системы Чебышева» состоит из двух разделов. Первый раздел занимает примерно четверть главы и посвящается разделенной разности n- го порядка $[F(z);z_0,...,z_n]$ функции $F(z)\in A(D)$, где $z_0,...,z_n\in D$. Приведем несколько свойств разделенной разности n-го порядка.

Свойство 1 [4]. *Пусть* $F(z)\in A(D)$ *и* $[F(z);z_0,...,z_n]\neq 0$, $n\geq 1$ *для любых различных* $z_0,...,z_n\in D$. *Тогда* $[F(z);z_0,...,z_n]\neq 0$ *для любых* $z_0,...,z_n\in D$. *В частности,* $F^{(n)}(z)\neq 0$ *в области* D.

В случае $n=1$ свойство 1 утверждает, что если $[F(z);z_0,z_1]\neq 0$ для любых различных $z_0,z_1\in D$, то $F(z)$ – однолистная в области D функция и производная $F'(z)\neq 0$ в области D.

Если $f(z)\in A^n(-a,a)$, $a>0$, то свойство 1 не всегда выполнимо. Например, пусть $f(x)=x^{n+2k}$. Тогда $[f(x);x_0,...,x_n]\neq 0$, $n\geq 1$, $k\geq 1$ для любых различных $x_0,...,x_n\in(-a,a)$. Однако, $f^{(n)}(0)=0$.

Свойство 2. *Пусть* $F(z) \in A(D)$. *Если* $F^{(n)}(z) \neq 0$ *в области* D, *то* $[F(z); z_0,...,z_n] \neq 0$ *локально в области* D, *т.е. для любой точки* $\xi \in D$ *найдется ее окрестность* $o(\xi)$, *в которой* $[F(z); z_0,...,z_n] \neq 0$.

В случае $n=1$ свойство 2 утверждает, что если производная $F'(z) \neq 0$ в области D, то функция $[F(z); z_0, z_1] \neq 0$ локально в области D, а $F(z)$ – локально однолистная в области D функция.

Подчеркнем, что свойство 2 не утверждает, что $[F(z); z_0,...,z_n] \neq 0$ для любых различных $z_0,...,z_n$, расположенных в области D. Действительно, пусть область D содержит мнимую ось. Возьмем функцию $F(z) = e^z$. Тогда $F^{(n)}(z) = e^z \neq 0$ и $[F(z); z_0,...,z_n] \neq 0$ локально в области D. Однако, $[F(z); z_0,...,z_n] = 0$, если $z_k = 2\pi k i$, $k = 0,1,...,n$.

Свойство 3. *Если* D *– выпуклая область и* $\operatorname{Re} F^{(n)}(z) > 0$ *в области* D, *то* $[F(z); z_0,...,z_n] \neq 0$ *для любых* $z_0,...,z_n \in D$.

Свойство 4 [4]. *Пусть* $F(z) \in A(D)$. *Для того чтобы* $[F(z); z_0, z_1] \neq 0$ *для различных* $z_0, z_1 \in D$ *необходимо и достаточно, чтобы* $F(z)$ *была однолистной функцией в области* D. *Для того чтобы* $[F(z); z_0, z_1,...,z_n] \neq 0$, $n \geq 2$, *для любых попарно различных* $z_0,...,z_n \in D$ *необходимо и достаточно, чтобы* $[F(z); z, z_1,...,z_{n-1}]$, *была однолистной функцией в области* D *для любых фиксированных* $z_1,...,z_{n-1} \in D$.

Пусть $D(\alpha)$ обозначает угловую область, ограниченную двумя лучами, выходящими из начала координат и образующими между собой угол равный α. Положение угловой области $D(\alpha)$ в плоскости при формулировке следующих двух свойств считается произвольным.

Свойство 5 [6]. *Пусть* $n \geq 1$, $k \geq 1$. *Имеет место соотношение*

$$[z^{n+k}; z_0,...,z_n] \neq 0,\ \forall z_0, z_1,...,z_n \in D(\alpha),\ \text{где}\ 0 < \alpha < 2\pi/(k+1).$$

Свойство 6. *Функция* $f(z) = 1/z^k$, $k \geq 1$, *является однолистной в угловой области* $D(\alpha)$, $0 < \alpha < 2\pi/k$ *и* $[z^{-k}; z_0,...,z_n] \neq 0$ *в этой области при любом* $n \geq 1$.

Второй раздел главы 2 «Системы Чебышева» посвящен этим системам в комплексной области. Имеет место теорема о кратности корней многочлена.

Теорема 1 [2, 5]. *Пусть аналитические в области* D *функции* $u_0(z), u_1(z),...,u_n(z)$, $n \geq 1$, *образуют* $T_n(D)$ *– систему. Тогда любой обобщенный многочлен* $P_n(z) = c_0 u_0(z) + ... + c_n u_n(z)$ (*случай* $c_0 = ... = c_n = 0$ *исключается*) *имеет в области* D *не более* n *корней с учетом их кратности.*

Для класса $A^n(-a,a)$, $a > 0$, теорема 1 не всегда справедлива. Пусть k – натуральное число. Функции $u_0(x) \equiv 1$, $u_1(x) = x$, $u_2(x) = x^{4k}$ образуют $T_2(-a,a)$– систему, но неполный многочлен $0 \cdot 1 + 0 \cdot z + 1 z^{4k}$ имеет корень $z = 0$ кратности $4k$.

Имеет место теорема о равномерно сходящейся последовательности функций, образующих систему Чебышева.

Теорема 2 [2, 5]. *Пусть для любого натурального* m *функции* $u_{k,m}(z)$ $k=0,1,...,n$ *из класса* $A(D)$ *образуют систему Чебышева в области* D. *Пусть также последовательность функций* $u_{k,m}(z)$, $m=1,2,...$ *равномерно сходится внутри области* D *к функции* $u_k(z)$. *Если предельные функции линейно независимы в области* D, *то они принадлежат классу* $A(D)$ *и образуют систему Чебышева в области* D.

Если в теореме 2 не требовать линейной независимости в области D для предельных функций $u_k(z)$, $k=0,...,n$, то она не всегда справедлива. Для этого достаточно взять функции $u_{km}(z)=\dfrac{km+1}{m}z^k$, $k=0,...,n$ и устремить m к бесконечности.

В диссертации изучаются изолированные особые точки обобщенного многочлена. Обозначим через Z комплексную плоскость, а через Z^+ – расширение комплексной плоскости. Пусть $Z^+(\xi_1,...,\xi_p)$ означает область, полученную из Z^+ выключением точек $\xi_1,...,\xi_p$. Отметим следующую теорему.

Теорема 3 [2, 5]. *1. Пусть функции* $1,u_1(z),...,u_n(z)$, $n\ge 1$ *образуют систему Чебышева в области* $Z^+(\xi_1)$, *где* $\xi_1=\infty$. *Тогда обобщенный многочлен* $P_n(z)=c_0+c_1u_1(z)+...+c_nu_n(z)$ *можно записать в виде* $P_n(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$.

2. Пусть функции $1,u_1(z),...,u_n(z)$, $n\ge 1$ *образуют систему Чебышева в области* $Z^+(\xi_1)$, *где* $\xi_1\ne\infty$. *Тогда обобщенный многочлен* $P_n(z)=c_0+c_1u_1(z)+...+c_nu_n(z)$ *можно записать в виде* $P_n(z)=a_0+\dfrac{a_1}{z-\xi_1}+...+\dfrac{a_n}{(z-\xi_1)^n}$.

3. Пусть функции $1,u_1(z),...,u_n(z)$, $n\ge 1$ *образуют систему Чебышева в области* $Z^+(\xi_1,\xi_2)$, *где* $\xi_1=\infty$ *и* $\xi_2\ne\infty$. *Тогда обобщенный многочлен* $P_n(z)=c_0+c_1u_1(z)+...+c_nu_n(z)$ *можно записать в виде*

$$P_n(z)=a_0+a_1z+...+a_kz^k+\frac{b_1}{z-\xi_2}+...+\frac{b_m}{(z-\xi_2)^m},\ 1\le k+m=n.$$

Опираясь на теорему 3, можно указать вид функции $F(z)$, образующей с функциями $1, z, \ldots, z^{n-1}$ систему Чебышева в расширенной комплексной плоскости с выключенными точками.

Следствие 1 [2, 5]. 1. *Пусть функции* $1, z, \ldots, z^{n-1}, F(z)$ *образуют систему Чебышева в области* $Z^{+}(\xi_1)$, $\xi_1 = \infty$. *Тогда функция* $F(z)$ *имеет вид*

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \; a_n \neq 0.$$

2. Пусть функции $1, z, \ldots, z^{n-1}, F(z)$ *образуют систему Чебышева в области* $Z^{+}(\xi_1)$, *где* $\xi_1 \neq \infty$. *Тогда функция* $F(z)$ *имеет вид* $F(z) = a_0 + \dfrac{a_1}{z - \xi_1}$.

3. Пусть функции $1, z, \ldots, z^{n-1}, F(z)$ *образуют систему Чебышева в области* $Z^{+}(\xi_1, \xi_2)$, *где* $\xi_1 = \infty$ *и* $\xi_2 \neq \infty$. *Тогда функция* $F(z)$ *имеет вид*

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k + \frac{b_1}{z - \xi_2}, \; 1 \leq k = n-1.$$

Рассмотрим частный случай системы Чебышева, а именно систему $1, F(z)$. Из следствия 1 видно, что однолистная в области функция $F(z)$ имеет только одну изолированную особую точку, которая является простым полюсом. В случае системы $1, z, \ldots, z^{n-1}, F(z)$, $n \geq 2$, функция $F(z)$ может иметь две (но не более) изолированные особые точки, одна из которых есть бесконечно удаленная точка.

По определению системы Чебышева обобщенный многочлен $c_0 u_0(z) + \ldots + c_n u_n(z)$ имеет в области D не более n различных корней. Если предположить, что обобщенный многочлен может иметь в области D не более l различных корней, где $l > n$, то мы имеем дело с новой системой аналитических в области D функций, которая обладает своими специфическими свойствами. В диссертации получены результаты, относящиеся и к такого рода системам [5].

В конце второго раздела даются примеры систем Чебышева [9, 10, 11].

В главе 3 «Система Чебышева и линейное дифференциальное уравнение» рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + g_{n-1}(z) y^{(n-1)}(z) + \ldots + g_1(z) y^{(1)}(z) + g_0(z) y(z) = 0, \tag{1}$$

где $g_0(z), \ldots, g_{n-1}(z) \in A(D)$. Решение ищется среди функций из класса $A(D)$. Пусть $y_1(z), \ldots, y_n(z)$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения. Тогда общее решение имеет вид $y(z) = c_1 y_1(z) + \ldots + c_n y_n(z)$.

Определение 1. Дифференциальное уравнение (1) назовем уравнением чебышевского типа в области D, если фундаментальная система решений этого уравнения является $T_n(D)$ – системой.

В первом разделе главы 3 даются условия, при выполнении которых фундаментальная система аналитических в круге $|z|<R$ функций будет системой Чебышева в этом круге. В этой связи дана оценка модуля k - й производной.

Теорема 4 [7]. *Пусть* $f(z)$ *– аналитическая в круге* $|z|\le R$ *функция имеет* n *нулей* $a_1,...,a_n$, *которые принадлежат этому кругу. Пусть также* $M_n=\max\limits_{|z|\le R}\left|f^{(n)}(z)\right|$. *Обозначим* $\Psi_m(z)=(z-a_1)...,(z-a_m)\left[f(z);a_1,...,a_n,z\right]$. *Тогда в круге* $|z|\le R$ *справедливо неравенство*

$$\left|\Psi_m^{(k)}(z)\right|\le\left(|z|+R\right)^{m-k}\frac{A_m^k M_n}{n!},\ \text{где}\ A_m^k=\frac{m!}{(m-k)!},\ 0\le k\le m\le n,\ m\ne 0.$$

Следствие 2 [7]. *Пусть* $f(z)$ *– аналитическая в круге* $|z|\le R$ *функция имеет* n *нулей* $a_1,...,a_n$, *которые расположены в круге* $|z|\le R$. *Пусть также* $M_n=\max\limits_{|z|\le R}\left|f^{(n)}(z)\right|$. *Тогда для любого* z *из круга* $|z|\le R$ *справедливо неравенство*

$$\left|f^{(k)}(z)\right|\le\frac{\left(|z|+R\right)^{n-k}}{(n-k)!}M_n,\ 0\le k\le n.$$

Теорема 5 [7, 8]. *Пусть* $g_0(z),...,g_{n-1}(z)$ *– аналитические в круге* $|z|\le R$ *функции. Если для любого* z *из круга* $|z|\le R$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(R+|z|\right)^k}{k!}\left|g_{n-k}(z)\right|\le 1,$$

то линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z)+g_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z)+...+g_1(z)y^{(1)}(z)+g_0(z)y(z)=0$$

является уравнением чебышевского типа в круге $|z|<R$.

Следствие 3 [7, 8]. *Пусть* $g_0(z),...,g_{n-1}(z)$ *– аналитические в круге* $|z|\le R$ *функции. Если для любого* $|z|\le R$ *выполняются неравенства*

$$\left|g_k(z)\right|\le\frac{1}{e^{2R}-1},\ k=0,1,...,(n-1),$$

то линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z)+g_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z)+...+g_1(z)y^{(1)}(z)+g_0(z)y(z)=0$$

является уравнением чебышевского типа в круге $|z|<R$.

В частности, если в круге $|z|<1$ *выполняются неравенства* $|g_k(z)|\le 1/7$, $k=0,1,\ldots,(n-1)$, *то данное дифференциальное уравнение будет уравнением чебышевского типа в этом круге.*

Второй раздел главы 3 посвящен изучению коэффициентов разложения функции в степенной ряд, являющейся частным решением линейного однородного дифференциального уравнения и удовлетворяющей специальным начальным условиям Коши.

Теорема 6 [1]. *Пусть* $L_n(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0$ *– многочлен с корнями* $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}$. *Тогда* $f(z)=(n-1)!\left[e^{z\lambda};\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}\right]$ *– единственная целая функция, удовлетворяющая линейному однородному дифференциальному уравнению*

$$y^{(n)}(z)+a_{n-1}y^{(n-1)}(z)+\ldots+a_1y'(z)+a_0y(z)=0 \qquad (2)$$

и условиям Коши $f^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,\ldots,(n-2)$, $f^{(n-1)}(0)=(n-1)!$.

Разложение функции $f(z)$ *в степенной ряд имеет вид*:

$$f(z)=z^{n-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n-1)!\left[\lambda^{n-1+k};\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}\right]}{(n-1+k)!}z^{n-1+k}.$$

Теорема 7 [1, 6]. *Пусть функция* $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{n-1+k}z^{n-1+k}$, $b_{n-1}=1$, *удовлетворяет дифференциальному уравнению (2). Пусть* $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}$ *– положительные корни многочлена* $L_{n+1}(\lambda)$. *Тогда* $b_{n+m-1}^2\ge b_{n+m-2}b_{n+m}$, $m=1,2,3,\ldots$.

Теорема 8 [1, 13]**.** *Пусть функция* $f(z)=z^{n-1}+\sum_{k=1}^{\infty}b_{n-1+k}z^{n-1+k}$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению (2). Если все корни* $\lambda_0,\ldots\lambda_{n-1}$ *многочлена* $L_n(\lambda)$ *принадлежат угловой области* $D(\alpha)$, $0<\alpha<2\pi/(m+1)$, *то* $b_{n-1+m}\ne 0$.

Следующая теорема касается неполных дифференциальных уравнений.

Теорема 9 [1]. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Неполное дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n+1)}(z)-\frac{k}{z}y^{(n)}(z)=0,\ n\ge 1,\ k\ge 1,$$

является уравнением чебышевского типа в угловой области $D(\alpha)$, $0<\alpha<2\pi/(k+1)$.

2. Неполное дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n+1)}(z)+\frac{n+k}{z}y^{(n)}(z)=0,\ n\ge 1,\ k\ge 1$$

является уравнением чебышевского типа в угловой области $D(\alpha)$, $0<\alpha<2\pi/k$.

3. Неполное дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n+1)}(z)-\frac{2k}{z}y^{(n)}(z)=0,\ n\geq 1, k\geq 1,$$

является уравнением чебышевского типа на любой прямой без точки $z=0$.

В главе 3 приводится также примеры дифференциальных уравнений, фундаментальные системы решений которых являются системами Чебышева [12].

В главе 4 «Некоторые обобщения и дополнения, связанные с системами Чебышева» **в**водится так называемый разностный определитель, обобщающий определитель Вронского. Рассматривается возможное обобщение константы Чебышева и трансфинитного диаметра. Изучается метрические свойства 2π – периодических множеств на плоскости.

Определение 3 [7]. Пусть задана линейно независимая в области D система функций $u_0(z),...,u_n(z)$, $n\geq 1$ из класса $A(D)$. Введем определитель

$$R_n(u_0,...,u_n;z_0,...,z_n)=\begin{vmatrix} u_0(z_0) & u_1(z_0) & \cdots & u_n(z_0) \\ [u_0(z);z_0,z_1] & [u_1(z);z_0,z_1] & \cdots & [u_n(z);z_0,z_1] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [u_0(z);z_0,z_1,...z_n] & [u_1(z);z_0,z_1,...,z_n] & \cdots & [u_n(z);z_0,z_1,...,z_n] \end{vmatrix}$$

и назовем его разностным определителем. В случае $z_0=z_1=...=z_n=\zeta$ разностный определитель превращается в известный определитель Вронского, снабженный множителем $(1!2!...n!)^{-1}$:

$$V(u_0,...,u_n;z)=\frac{1}{1!2!...n!}\begin{vmatrix} u_0(\zeta) & u_1(\zeta) & \cdots & u_n(\zeta) \\ u_0^{(1)}(\zeta) & u_1^{(1)}(\zeta) & \cdots & u_n^{(1)}(\zeta) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_0^{(n)}(\zeta) & u_1^{(n)}(\zeta) & \cdots & u_n^{(n)}(\zeta) \end{vmatrix}.$$

Разностный определитель имеет особенно простой вид, если взять систему функций $1,z,...,z^{n-1},F(z)$. Тогда

$$R_n\left(1,z,...,z^{n-1},z^n,F(z);z_0,...,z_n\right)=[F(z);z_0,...,z_n].$$

Лемма 1 [7]. Если $z_0,...,z_n$ *– попарно различные точки из области* D, *то*

$$R_n(u_0,...,u_n;z_0,...,z_n)=\frac{H(u_0,...,u_n;z_0,...,z_n)}{W\left(1,z,...z^{n-1},z^n;z_0,...,z_n\right)},$$

где

$$H(u_0,...,u_n;z_0,...,z_n)=\begin{vmatrix} u_0(z_0) & u_1(z_0) & \cdots & u_n(z_0) \\ u_0(z_1) & u_1(z_1) & \cdots & u_n(z_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_0(z_n) & u_1(z_n) & \cdots & u_n(z_n) \end{vmatrix},$$

$$W\left(1,z,\dots,z^{n-1},z^n;z_0,z_1,\dots,z_n\right)=\begin{vmatrix}1 & z_0 & \dots & z_0^{n-1} & z_0^n\\ 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} & z_1^n\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-1} & z_n^n\end{vmatrix}.$$

Лемма 2 [7]. *Если разностный определитель* $R_n(u_0,\dots,u_n;z_0,\dots,z_n)$ *не равен нулю при любых попарно различных* $z_0,\dots,z_n\in D$*, то он не равен нулю и при любых* $z_0,\dots,z_n\in D$*. В частности, тогда определитель Вронского отличен от нуля в* D.

Лемма 3. [7]. *Если функции* $u_0(z),\dots,u_n(z)$, $n\ge 1$*, образуют систему Чебышева в области* D*, то разностный определитель* $R_n(u_0,\dots,u_n;z_0,\dots,z_n)\ne 0$ *для любых* $z_0,\dots,z_n\in D$.

Лемма 4. [7]. *Если разностный определитель* $R_n(u_0,\dots,u_n;z_0,\dots,z_n)\ne 0$ *для любых попарно различных* $z_0,\dots,z_n\in D$*, то функции* $u_0(z),\dots,u_n(z)$, $n\ge 1$*, образуют систему Чебышева в области* D.

Следующая теорема связывает разностный определитель с линейным однородным дифференциальным уравнением.

Теорема 10 [7]. *Для того чтобы дифференциальное уравнение (1) было уравнением чебышевского типа в области* D*, необходимо и достаточно, чтобы разностный определитель* $R_n(u_0,\dots,u_{n-1};z_0,\dots,z_{n-1})$*, составленный из фундаментальной системы* $u_0(z),\dots,u_{n-1}(z)$*, был отличен от нуля для любых попарно различных* $z_0,\dots,z_n\in D$.

Определение 4 [7]. Систему аналитических в области D функций $u_0(z),\dots,u_n(z)$, $n\ge 1$, назовем локально чебышевской в области D, если для любой точки $\xi\in D$ существует окрестность $o(\xi)$ этой точки такая, что в этой окрестности функции $u_0(z),\dots,u_n(z)$, $n\ge 1$, образуют систему Чебышева.

Если функции $u_0(z),\dots,u_n(z)$, $n\ge 1$ образуют локально чебышевскую систему в области D, то они не всегда образуют чебышевскую систему в области D. Например, функции $1,z,\dots,z^{n-1},e^z$ образуют локально чебышевскую систему в области $-2\pi n<Jm\,z<2\pi n$, но не образуют чебышевскую систему в этой области.

Определение 5 [7]. Назовем разностный определитель $R_n(u_0,\dots,u_n;z_0,\dots,z_n)$ локально отличным от нуля в области D, если для любой точки $\xi\in D$ существует окрестность $o(\xi)$ этой точки такая, что разностный определитель отличен от нуля для любых попарно различных $z_0,\dots,z_n$, взятых в этой окрестности.

Если разностный определитель локально отличен от нуля в области D, то он не обязательно отличен от нуля в этой области. Примером может служить разностный определитель $R_n\left(1,z,...,z^{n-1},e^z;z_0,...,z_n\right)$. Он локально отличен от нуля в вертикальной полосе $-\pi<\operatorname{Re}z<\pi$, но $R_n\left(1,z,...,z^{n-1},e^z;z_0,...,z_n\right)=0$, если в этой полосе взять точки $z_k=2\pi ik$, $k=0,1,...,n$.

Теорема 11 [7]. *Для того чтобы разностный определитель* $R_n(u_0,...,u_n;z_0,...,z_n)$ *был отличен от нуля локально в области* D, *необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского* $V(u_0,...,u_n;z)\neq 0$ *при любом* $z\in D$.

Следствие 5 [7]. *Для того чтобы функции* $u_0(z),...,u_n(z)$, $n\geq 1$, *образовали локальную систему Чебышева в области* D, *необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского* $V(u_0,...,u_n;z)\neq 0$ *при любом* $z\in D$.

Заметим, что функции $u_0(x)\equiv 1$, $u_1(x)=x$, $u_2(x)=x^4$ образуют локальную систему Чебышева на прямой, проходящей через начало координат, но определитель Вронского $H(u_0,u_1,u_2;0)=0$.

По определению системы Чебышева обобщенный многочлен $P_n(z)=c_0u_0(z)+...+c_nu_n(z)$ (случай $c_0=...=c_n=0$ исключается) имеет в области D не более n различных корней. При этом этих многочленов существует обобщенный многочлен, имеющий в области D ровно n различных корней. Предположим, что любой обобщенный многочлен $P_n(z)$ имеет в области D не более l, $l>n$, корней и существует обобщенный многочлен, имеющий ровно l корней в области D. Мы имеем дело с новой системой аналитических в области D функций, которая обладает специфическими свойствами. Получены результаты, относящиеся к таким системам [5, 14].

В диссертации предложено одно возможное обобщение трансфинитного диаметра и константы Чебышева [3]. Пусть функции $u_0(z),...,u_n(z)$ образуют систему Чебышева в области D. Каждый многочлен $P(z)=c_0u_0(z)+...+c_nu_n(z)$ обладает максимумом модуля в замкнутой области $\bar{Q}\subset D$. Существует многочлен $P_n(z;\bar{Q})$, имеющий наименьший максимум модуля на $\bar{Q}$. Возьмем определитель $H(u_0,...,u_n;z_0,...,z_n)$. Пусть Y_{n+1} – максимум модуля такого определителя, когда $z_0,...,z_n$ пробегают все попарно различные точки множества $\bar{Q}$. Положим

$$\tau_n=\sqrt[n]{m_n}\,,\ d_n=Y_n^{\frac{2}{n(n+1)}},\ m_n=\max_{z\in Q}\left|P_n(z;Q)\right|.$$

Определение 6. Обозначим $\tau = \lim \tau_n$ и $d = \lim d_n$. Назовем τ константой Чебышева по марковской системе функций $u_n(z)$, $n = 0,1,2,...$, а d – трансфинитным диаметром множества $\bar{Q}$ по этой системе.

М. Фекете доказал, что $\tau = \lim \tau_n$, $d = \lim d_n$ существуют и $\tau = d$ для системы функций $1, z, z^2, ..., z^n, ...$. В этом направлении справедлива следующая теорема.

Теорема 12 [3]**.** *Пусть задана марковская система функций* $u_n(z)$, $n = 0,1,2,...$. *Если существует предел* $\tau = \lim \tau_n$, *то существует предел* $d = \lim d_n$ *и* $\tau = d$.

Определение 7 [3]. Пусть B – множество, обладающее свойствами: если $z \in B$, то $z \pm 2\pi \in B$ и пересечение B с вертикальной полосой $0 \le \operatorname{Re} z \le 2\pi$ есть замкнутое ограниченное множество. Множество B назовем 2π- периодическим множеством на плоскости.

Пусть точки $z_0, ..., z_n \in B$ и лежат в полосе $0 \le \operatorname{Re} z \le 2\pi$. Введем функцию

$W(z_0, ..., z_n) = \prod_{0 \le k < l \le n} \sin \frac{z_k - z_l}{2}$, $z_0, ..., z_n \in B$ и обозначим $W_n = \max_{z_0, ..., z_n \in B} |W(z_0, ..., z_n)|$.

Рассмотрим различные функции от аргумента $z \in B$, имеющие вид

$$S_n(z; z_1, ..., z_n) = \prod_{s=1}^{n} \sin \frac{z - z_s}{2}.$$

Существует функция $S_n^*(z)$ с наименьшим максимумом модуля m_n^* на B.

Определение 8. Число $\beta_n = \frac{W_{n+1}}{W_n}$ назовем числом Фекете множества B, а $S_n^*(z)$ назовем функцией Чебышева множества B.

Теорема 13 [3]. *Для числа Фекете* β_n *имеет место двойное неравенство* $m_{n+1}^* \le \beta_n \le (n+2) e^{(n+1)h} m_{n+1}^*$, *где* $2h$ *– диаметр проекции множества* B *на мнимую ось.*

Положим $\tau_n^* = \sqrt[n]{m_{n+1}^*}$. Тогда $\lim_{n \to \infty} \tau_n^* = \tau^* \ne \infty$ [3].

Определение 9. Число τ^* назовем константой Чебышева для множества B.

Теорема 14 [3]. *Если множество* B *расположено на вещественной оси, то* $\tau^* = \frac{1}{2} \eta^*$, *где* η^* *– емкость множества* D, *получаемого отображением* $\omega = e^{iz}$ *из* B.

Теорема 15 [3]. *Постоянная Чебышева* τ^* *для множества*

$$B = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{x : 2\pi k + p \le x \le 2\pi k + g,\ 0 \le p < g < 2\pi\}$$

и емкость η *множества* $D = \{\omega : |\omega| = 1,\ p \le \arg \omega \le g\}$ *связаны между собой формулой* $\tau^* = \frac{1}{2} \eta$, *где* $\eta = \sin \frac{g - p}{4}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Доказана теорема об обобщенном многочлене Чебышева в случае кратных корней. Найдены условия, при выполнении которых равномерный предел обобщенных многочленов Чебышева будет обобщенным многочленом Чебышева. Даны необходимое и достаточное условия того, чтобы система функций была системой Чебышева в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками. Даны примеры систем Чебышева. Содержание данного пункта отражено в работах [2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12].

2. Дана оценка модуля k- й производной аналитической в области D функции, имеющей n нулей в этой области. Найдены условия, налагаемые на коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения, при выполнении которых это уравнение будет чебышевского типа. Даны необходимое и достаточное условия того, что линейное однородное дифференциальное уравнение будет уравнением чебышевского типа, выраженные с помощью разностного определителя. Доказана теорема о расположении и числе корней в угловой области характеристического многочлена линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Установлены свойства коэффициентов функции, удовлетворяющей линейному однородному дифференциальному уравнению и специальным начальным условиям Коши. Содержание данного пункта отражено в работах [1, 6, 7, 8, 12, 13].

3. Найдены свойства разностного определителя в случае произвольного расположения точек в области. Даны необходимое и достаточное условия того, чтобы данная система функций была локально чебышевской, выраженные с помощью определителя Вронского. Установлена теорема, обобщающая теорему Фекете о трансфинитном диаметре и константе Чебышева. Изучены метрические свойства 2π – периодических множеств на плоскости. Содержание данного пункта отражено в работах [3, 7, 14].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты имеют теоретическое значение. Они могут быть использованы в теории функций комплексного переменного.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных изданиях, соответствующих п. 18 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь»

1. Кирьяцкий, Э. О расположении корней некоторых специальных полиномов / Э. Кирьяцкий, Д. Кирьяцкис, // Лит. матем. сборник. – 2004. – № 44. – С. 150–157.

2. Кирьяцкис, Д. О некоторых свойствах аналитических функций, образующих систему Чебышева / Д.Э. Кирьяцкис // Веснік ГрДУ. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. – 2011. – № 2 (111). – С. 5 –14.

3. Кирьяцкис, Д. Об одном обобщении трансфинитного диаметра и постоянной Чебышева. / Д. Кирьяцкис // Веснік ГрДУ. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. – 2011. – № 3 (118). – С. 40–49.

4. Кирьяцкис, Д. О некоторых свойствах системы Чебышева, связанной с разделенной разностью n –го порядка / Д. Кирьяцкис // Известия Смоленского государственного университета. – 2011. – № 4 (16). – С. 155–166.

5. Кирьяцкис, Д. Об одном обобщении системы Чебышева / Д. Кирьяцкис // Известия Смоленского государственного университета. – 2012. – № 4 (20). – С. 344–353.

Статьи в других научных журналах

6. Кирьяцкий, Э.Г. О некоторых свойствах симметрического многочлена / Э.Г. Кирьяцкий, Д. Кирьяцкис // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284. – С. 21–24.

7. Кирьяцкис, Д. О линейном однородном дифференциальном уравнении и системе Чебышева / Д. Кирьяцкис // Вестник Брестского государственного университета. Сер. 4. – 2012. – № 1. – С. 66–77.

8. Кирьяцкис, Д. О линейном дифференциальном уравнении чебышевского типа / Д. Кирьяцкис // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С. – 2012. – № 4. – С. 47–54.

Материалы и тезисы докладов научных конференций

9. Кирьяцкис, Д.Э. О числе корней некоторых уравнений / Д.Э. Кирьяцкис // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск, 2003. – С. 107–108.

10. Кирьяцкис, Д.Э. Об одной чебышевской системе рациональных функций / Д.Э. Кирьяцкис // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск, 2005.– Вып. 6. – С.131–132.

11. Kirjackis, D.E. Several examples of Chebyshev systems / D.E. Kirjackis // 6-ая международная конференция «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений», Минск, 12–17 сентября 2011 г. – 2011.– С. 76.

12. Кирьяцкис, Д. Некоторые примеры фундаментальных систем однородных линейных дифференциальных уравнений и системы Чебышева / Д. Кирьяцкис // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск. – 2012. – Вып. 13. – С. 175–177.

13. Кирьяцкис, Д. Об одном свойстве коэффициентов функции, удовлетворяющей линейному однородному дифференциальному уравнению / Д. Кирьяцкис // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск. – 2012. – Вып. 13. – С. 178.

14. Кирьяцкис, Д. О корнях одного трансцендентного уравнения / Д.Э. Кирьяцкис // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. – Смоленск, 2013. – С. 149–150.

РЭЗЮМЭ

Кірьяцкіс Дзмітрыюс
Сістэмы Чабышова ў камплексным абсягу і іх ужыванне

Ключавыя словы: аналітычная функцыя, абагульнены палінам, сістэма Чабышова, падзеленая рознасць, лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне.

Аб'ект даследавання: паслядоўнасць аналітычных у камплексным абсягу функцый, якія ўтвараюць сістэму Чабышова.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца атрыманне ўласцівасцяў функцый, якія ўтвараюць сістэму Чабышова, іх сувязі з падзеленымі рознасцямі вышэйшых парадкаў і звычайнымі дыферэнцыяльнымі ураўненнямі.

Метады даследавання: выкарыстоўваюцца метады тэорыі аналітычных функцый, апарат падзеленых рознасцяў і метады тэорыі лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыі атрыманы наступныя новыя навукова абгрунтаваныя вынікі.

- Атрымана адзнака модуля k-й вытворнай аналітычнай у вобласці D функцыі, якая мае n нулёў у гэтай вобласці. Знойдзены ўмовы, якія накладваюцца на каэфіцыенты лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення, пры выкананні якіх гэтае ўраўненне будзе чабышовага тыпу. Дадзены неабходныя і дастатковыя ўмовы таго, што лінейнае аднароднае дыферэнцыяльнае ўраўненне будзе ўраўненнем чабышовага тыпу. Даказана тэарэма аб размяшчэнні і колькасці каранёў у вуглавой вобласці характарыстычнага палінома лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення з пастаяннымі каэфіцыентамі.
- Даказана тэарэма пра абагульнены палінам Чабышова ў выпадку кратных каранёў. Знойдзены ўмовы, пры выкананні якіх раўнамерная граніца абагульненых паліномаў Чабышова будзе абагульненым паліномам Чабышова. Дадзены неабходныя і дастатковыя ўмовы таго, каб сістэма функцый была сістэмай Чабышова ў пашыранай камплекснай плоскасці з выкалатымі пунктамі.
- Знойдзены ўласцівасці рознаснага вызначальніка ў выпадку адвольнага размяшчэння пунктаў у вобласці. Дадзены неабходныя і дастатковыя ўмовы таго, каб дадзеная сістэма функцый з'ўлялася лакальна чабышовай, выражаныя з дапамогай вызначальніка Вронскага. Устаноўлена тэарэма, якая абагульняе тэарэму Фекете пра трансфінітны дыяметр і канстанту Чабышова.

Рэкамендацыі па выкарыстанні і вобласць ужывання. Атрыманыя вынікі маюць тэарэтычнае значэнне. Яны могуць быць выкарыстаны ў тэорыі інтэрпаляцыі і апраксімацыі функцый камплекснай пераменнай.

РЕЗЮМЕ

Кирьяцкис Дмитриюс

Системы Чебышева в комплексной области и их применение

Ключевые слова: аналитическая функция, обобщенный многочлен, система Чебышева, разделенная разность, линейное дифференциальное уравнение.

Объект исследования: последовательность аналитических в комплексной области функций, образующих систему Чебышева.

Целью диссертационной работы является получение свойств функций, образующих систему Чебышева, их связи с разделенными разностями высших порядков и с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Методы исследования: используется методы теории аналитических функций, аппарат разделенных разностей и методы теории линейных дифференциальных уравнений.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации получены следующие новые научно обоснованные результаты.

- Доказана теорема об обобщенном многочлене Чебышева в случае кратных корней. Найдены условия, при выполнении которых равномерный предел обобщенных многочленов Чебышева будет обобщенным многочленом Чебышева. Даны необходимое и достаточное условия того, чтобы система функций была системой Чебышева в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками.
- Получена оценка модуля k-й производной аналитической в области D функции, имеющей n нулей в этой области. Найдены условия, налагаемые на коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения, при выполнении которых это уравнение будет чебышевского типа. Даны необходимое и достаточное условия того, что линейное однородное дифференциальное уравнение будет уравнением чебышевского типа. Доказана теорема о расположении и числе корней в угловой области характеристического многочлена линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
- Найдены свойства разностного определителя в случае произвольного расположения точек в области. Даны необходимое и достаточное условия того, чтобы данная система функций была локально чебышевской, выраженные с помощью определителя Вронского. Установлена теорема, обобщающая теорему Фекете о трансфинитном диаметре и константе Чебышева.

Рекомендации по использованию и область применения. Полученные результаты имеют теоретическое значение. Они могут быть использованы в теории функций комплексного переменного.

SUMMARY

Kiryatskis Dmitriyus

Chebyshev systems in the complex domain and their applications

Keywords: analytic function, generalized polynomial, Chebyshev system, divided difference, linear differential equation.

Object of study: sequence of analytic functions in the complex domain, which form a Chebyshev system.

The aim of the thesis is to provide features of the functions which form a Chebyshev system, their relations with higher-order divided differences and ordinary differential equations.

Methods: applying methods of the theory of analytic functions, the technique of divided differences and methods of the theory of linear differential equations.

Results and novelty. In the thesis, the following new evidence-based results are obtained.

- An estimate of the module of the *k-th* derivative of an analytic in the domain D function, with *n* zeros in this field, is obtained. Conditions for the coefficients of the linear homogeneous differential equation, under which this equation is Chebyshev type, are found. Necessary and sufficient conditions for a linear homogeneous differential equation to be an equation of Chebyshev type are given. The theorem on the location and number of roots in the angular domain of the characteristic polynomial of a linear homogeneous differential equation with constant coefficients is proven.
- The theorem on the generalized Chebyshev polynomial in the case of multiple roots is proven. Conditions, under which the uniform limit of generalized Chebyshev polynomials is a generalized Chebyshev polynomial, are found. The necessary and sufficient conditions for the system of functions to be a Chebyshev system in the extended complex plane with punctures are given.
- Properties of the difference determinant in the case of arbitrary location of the points in the domain are found. Necessary and sufficient conditions for a given system of functions to be locally Chebyshev, are expressed using the Wronskian determinant. A theorem, which generalizes Fekete's Theorem on transfinite diameter and Chebyshev constant, is established. The asymptotic of the roots of transcendental equations, associated with the Chebyshev system, is obtained.

Recommendations for use and application. Acquired results are of theoretical importance. They can be used in the theory of functions of complex variables.