Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.925

ВАНЬКОВА
Татьяна Николаевна

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

Гродно, 2013

Работа выполнена в учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Научный руководитель: **Мартынов Иван Платонович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математического анализа
и дифференциальных уравнений
учреждения образования
«Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы»

Официальные оппоненты:

Цегельник Владимир Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики
учреждения образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»;

Мататов Валерий Иванович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры дифференциальных уравнений
и системного анализа
Белорусского государственного университета

Оппонирующая организация:

учреждение образования
«**Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины**»

Защита состоится 18.10.2013 в 10.00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209
Телефон ученого секретаря: (+375 152) 74 43 76; (+375 152) 73 19 26
E–mail: v.a.pronko@gmail.com; n.nech@grsu.by

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГрГУ им. Я. Купалы
Автореферат разослан “____”_____________ 2013 г.

Учёный секретарь
совета по защите диссертаций К 02.14.02 В.А. Пронько

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Задача выделения классов нелинейных дифференциальных уравнений и систем, решения которых не имеют подвижных многозначных особых точек, является одной из важнейших задач аналитической теории дифференциальных уравнений.

В аналитической теории дифференциальных уравнений рассматриваются решения дифференциального уравнения как функции комплексного переменного. Свойства функции комплексного переменного во многом определяются характером особых точек. Л. Фукс разделил все особые точки решений дифференциальных уравнений на подвижные и неподвижные: подвижными (неподвижными) особыми точками называют особые точки решений дифференциальных уравнений, положение которых зависит (не зависит) от начальных данных.

В работе будем придерживаться следующего определения.

Определение 1. Обыкновенное дифференциальное уравнение имеет свойство Пенлеве, если его общее решение в качестве подвижных особых точек может иметь только полюсы.

Обыкновенные дифференциальные уравнения со свойством Пенлеве будем также называть уравнениями типа Пенлеве (или Р-типа).

В последние годы произошло повышение интереса к исследованию дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве, так как обнаружилось, что свойство Пенлеве имеет тесную связь с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Раздел нелинейной математической физики, связанный со свойством Пенлеве для дифференциальных уравнений, интенсивно развивается и с его помощью получены важные и интересные результаты при решении многих нелинейных задач в области гидродинамики, физики плазмы, нелинейной оптики и физики твердого тела.

Для уравнения
$$y^{(n)} = R\left(z, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$
где R – рациональная функция относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ с локально аналитическими по z коэффициентами, n – натуральное число, в случае $n = 1, 2$ исследованы аналитические свойства решений данных классов уравнений, а в случае $n \geq 3$ построение общей теории еще не завершено.

Таким образом, на сегодняшний день задача изучения аналитических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений является очень актуальной, что и определило выбор темы диссертации.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Диссертация выполнена на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» в рамках научно-исследовательских работ «Аналитические и качественные свойства нелинейных дифференциальных систем» государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели 08» (номер гос. регистрации 20064103, срок выполнения 2006 – 2010 гг.) и «Аналитические и качественные характеристики нелинейных дифференциальных уравнений и динамических систем, моделирующих практические задачи математической физики и других областей естествознания» государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» (номер гос. регистрации 20121142, сроки выполнения 2011 – 2015 гг.).

Цель и задачи исследования

Целью исследования является выделение классов дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных многозначных особых точек, а также изучение аналитических свойств решений дифференциальных уравнений нечетного порядка, представляющих собой обобщение уравнения Шази с подвижной особой линией.

Задачи исследования:

1) Нахождение необходимых условий отсутствия многозначных особых точек у решений дифференциальных уравнений третьего порядка определенного вида.

2) Доказательство условий достаточности наличия свойства Пенлеве и установление аналитических свойств решений выделенных классов дифференциальных уравнений с помощью построения преобразований Беклунда.

3) Получение дифференциальных уравнений нечетного порядка с подвижной особой линией; определение структуры множества резонансов этих уравнений; построение $(n+1)$ – параметрических рациональных решений рассматриваемого уравнения; доказательство сходимости рядов Лорана, представляющих решение данного уравнения; построение трехпараметрических решений уравнения с подвижной особой линией.

Объектом исследования являются дифференциальные уравнения вида

$$y^{(2n+1)} = F(z, y, y', ..., y^{(2n)}), \qquad (1)$$

где в случае $n=1$ функция F представляет собой рациональную функцию относительно комплекснозначной функции y и ее производных y', y'' с аналитическими по z коэффициентами, причем вид правой части уравнения (1) определяется порядком полюса решений данных уравнений.

В работах по классификации нелинейных дифференциальных уравнений (обыкновенных или с частными производными) по свойству Пенлеве принято использовать символы Бюро[1].

Считают, что дифференциальное уравнение принадлежит классу PS или ZK, если его решения в подвижной точке z_0 комплексной плоскости z имеют соответственно полюс порядка s или нуль порядка k (PS, ZK – символы Бюро).

Если функция y имеет полюс порядка s, то число $m(s+k)$ будем называть весом одночлена $\left(y^{(k)}\right)^m$, k – целое, неотрицательное число; где m – натуральное, $y^{(k)} = \dfrac{d^k y}{dz^k}$.

В случае принадлежности уравнения (1) к классам уравнений третьего порядка вида P1, P2, P3 и P4 рассмотрим соответственно уравнения:

$$\text{P1:}\quad y''' = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\frac{y''^2}{y'} + a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2} + a_3 yy'' + a_4 y'^2 + a_5\frac{y^3 y''}{y'} + \\ + a_6 y^2 y' + a_7 y^4 + a_8\frac{y^6}{y'}; \qquad (2)$$

$$\text{P2:}\quad y''' = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\frac{y''^2}{y'} + a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2} + 2a_3\frac{y^2 y''}{y'} + a_4 yy' + a_5\frac{y^4}{y'}; \qquad (3)$$

$$\text{P3:}\quad y''' = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\frac{y''^2}{y'} + a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2} + a_3 y^2 + R_1(y'', y', y, z); \qquad (4)$$

$$\text{P4:}\quad y''' = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\frac{y''^2}{y'} + a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2} + a_3\frac{y^3}{y'} + R_2(y', y, z); \qquad (5)$$

где y – комплекснозначная функция от z, z – независимая комплексная переменная, $a_k, k=\overline{1,8}$ – комплексные постоянные, $R_1(y'', y', y, z), R_2(y', y, z)$ – рациональные функции по y'', y', y с аналитическими по z коэффициентами, вес слагаемых которых меньше веса выделенных членов соответствующих уравнений.

Кроме того рассмотрим класс уравнений вида (1), являющийся обобщением уравнения Шази с подвижной особой линией

$$y^{(2n+1)} = 2yy^{(2n)} + \sum_{m=1}^{n} a_m y^{(m)} y^{(2n-m)}, \qquad (6)$$

[1] Bureau, F. Differential equations with fixed critical points / F. Bureau // Ann. di Math. – 1964. – V. 64. – P. 229 – 364.

где n – натуральное число, y – комплекснозначная функция от z, z – независимая комплексная переменная,

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dz^k}\ ,\ k = \overline{1, 2n+1},$$

коэффициенты a_m имеют вид

$$a_m = \frac{(-1)^m}{n+1} C_{2n}^m C_{2n+2}^{m+1},\ m = \overline{1, n-1};\ a_n = \frac{(-1)^n (2n+1)}{(n+1)^2} \left(C_{2n}^m\right)^2.$$

Предмет исследования – аналитические свойства решений дифференциальных уравнений (2) – (6).

Научную новизну работы определяет вышеприведенные объект и предмет исследования. Аналитические свойства решений некоторых дифференциальных уравнений вида (2) – (5) в случае $\nu = 1$ были исследованы в статье[2] и работе[3], однако в [2] имеются некоторые пропуски, а в работе[3] содержатся неточности в записи уравнений, кроме того в [3] в ряде случаев отсутствует доказательство мероморфности решений выделенных уравнений. В работе[4] также рассматриваются уравнения вида (2) – (5), однако аналитические свойства решений данных уравнений не указаны. Аналитические свойства решений уравнений (2) – (5) в случае $\nu \neq 1$ и уравнения (6) исследованы впервые – это определяет научную значимость исследований.

Положения, выносимые на защиту

1. Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у решений уравнений (2) – (5); уравнения вида (2) – (5), общие решения которых мероморфны.
2. Метод построения преобразований Беклунда для установления аналитических свойств решений дифференциальных уравнений вида (2) – (5).
3. Структура резонансов уравнения (6); $(n+1)$ – параметрические рациональные решения уравнения (6); доказательство сходимости рядов Лорана, представляющих решение данного уравнения; трехпараметрические решения уравнения (6) с подвижной особой линией.

---

[2] Мартынов, И.П. Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей / И.П. Мартынов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 6. – С. 937 – 946.

[3] Mugan, U. Non-polynomial third order equations which pass the Painlevé test / U. Mugan, F. Jrad // Z. Naturforsch. A. – 2004. – V. 59a. – P. 163 – 180.

[4] Adjabi, Y. Third order differential equations with fixed critical points / Y. Adjabi, A. Kessi, U. Mugan // Stud. App1. Math. – 2009. – Vol. 208, № 1. – P. 238 – 248.

Личный вклад соискателя

Основные результаты, изложенные в диссертации, получены лично соискателем. В совместных работах научный руководитель И.П. Мартынов и соавтор В.А. Пронько принимали участие в формулировке целей и задач исследования, выборе методов исследования, обсуждении полученных результатов.

Апробация результатов диссертации

Основные положения и выводы диссертации были обсуждены на семинарах кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», а также докладывались и обсуждались на следующих конференциях: XII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2007» (Минск, 16 – 19 мая 2007 г.), Первой международной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (Минск, 2 – 5 октября 2007 г.), XIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2009» (Пинск, 26 – 29 мая), Международной математической конференции «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 7 – 10 декабря 2010 г.), XIV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2011» (Новополоцк, 12 – 14 мая 2011 г.), Международной научной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (AMADE – 2011) (Минск, 12 – 17 сентября 2011 г.), Международном научном семинаре «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (AMADE – 2012) (Минск, 10–14 сентября 2012г.), Третьей международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (Брест, 17 – 22 сентября 2012 г.), XI Белорусской математической конференции (Минск, 4 – 9 ноября 2012 г.), XV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2013» (Гродно, 13 – 16 мая 2013 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 20 научных работах. Из них: 9 статей в научных журналах, соответствующих пункту 18 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь», 1 статья в сборнике научных трудов конференции, 10 тезисов докладов научных конференций.

Структура и объем диссертации

Полный объем диссертации составляет 105 страниц. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения, библиографического списка, расположенного на 14 страницах, включающего 175 наименований (из них 20 – собственные публикации автора).

Первая глава посвящена обзору литературы по теме исследования. В ней также рассматриваются методы исследования аналитических свойств решений дифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена выделению классов дифференциальных уравнений вида (2) – (5), удовлетворяющих необходимым условиям наличия свойства Пенлеве, а также изучению аналитических свойств решений выделенных уравнений.

Третья глава посвящена изучению структуры резонансов и области сходимости рядов Лорана, представляющих решение уравнения (6), построению $(n+1)$ – параметрических рациональных решений и решений с подвижной особой линией уравнения (6).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 содержит обзор литературы по теме исследования, а также методов изучения аналитических свойств решений дифференциальных уравнений.

Глава 2 посвящена исследованию аналитических свойств решений дифференциальных уравнений вида (2) – (5). Если решение уравнений (2) – (5) искать в виде

$$y = \alpha(z - z_0)^{-s} + ... + h_r(z - z_0)^{r-s} + ..., \qquad (7)$$

тогда для нахождения чисел α и r получим уравнения

$$b_s(\alpha) = 0, \qquad (8)$$

$$(r+1)(r^2 - M_k r + N_k) = 0, \qquad (9)$$

где числа $M_k = p_k + q_k$ и $N_k = p_k q_k$ – соответственно сумма и произведение корней уравнения (9), отвечающих корню α_k уравнения (8), причем p_k, q_k, – целые, различные, отличные от -1, число k определяется количеством корней уравнения (8) .

В **разделе 2.1** рассмотрено уравнение (2). При $s=1$ уравнение (8) имеет вид:

$$b_1(\alpha) = a_8\alpha^4 - a_7\alpha^3 + (a_6 + 2a_5)\alpha^2 - (2a_3 + a_4)\alpha + \left(a_2 + 2a_1 - 2 - \frac{4}{\nu}\right).$$

Пусть $A = 2 + \frac{4}{\nu} - 2a_1 - a_2$. Имеют место

Лемма 1 [10]. Для наличия у решений уравнения (2) при $A \neq 0$ и конечном ν свойства Пенлеве необходимо выполнение условий:

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\alpha_k}{N_k} = \sum_{k=1}^{4} \frac{\alpha_k^2}{N_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{N_k} = \frac{1}{A}, \sum_{k=1}^{4} \frac{M_k}{N_k} = \frac{B}{A}, \text{если } a_8 \neq 0; \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\alpha_k}{N_k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\alpha_k^2}{N_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{N_k} = \frac{1}{A}, \sum_{k=1}^{3} \frac{M_k}{N_k} = \frac{B}{A}, \text{если } a_8 = 0, a_7 \neq 0; \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\alpha_k}{N_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{N_k} = \frac{1}{A}, \sum_{k=1}^{2} \frac{M_k}{N_k} = \frac{B}{A}, \text{если } a_8 = a_7 = 0, a_6 + 2a_5 \neq 0; \tag{12}$$

где $B = 3 + \frac{4}{\nu} - a_1$.

Лемма 2 [7, 9, 16]. Для того чтобы уравнение (2) имело свойство Пенлеве, необходимо выполнение условий:

1) при $\nu \neq 1$и $\nu \neq \infty$ коэффициенты a_5, a_8 связаны соотношением

$$\frac{1}{\nu} a_5^2 + \left(1 - \frac{2}{\nu}\right)^2 a_8 = 0; \tag{13}$$

2) $a_5 = a_8 = 0$ при $\nu = 1$;

3) $a_5 \cdot a_8 = 0$ при $\nu = \infty$.

Лемма 3 [18]. Уравнение (2) можно привести к системе вида

$$\begin{gathered} y' = y^2 - (\nu + 1) y \upsilon, \; u' = (A_1 + A_2) y u + u^2 + (\nu + 1) A_2 u \upsilon + A_3 \frac{\nu + 1}{\nu} y \upsilon, \\ \upsilon' = -\nu u \upsilon + (\lambda + 1)(\nu + 1) \upsilon^2 + \frac{\nu}{\nu + 1} u y; \end{gathered} \tag{14}$$

где λ – корень уравнения $\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\lambda^2 + (a_1 + 1)\lambda - a_2 = 0;$

$$A_1 = a_3 + \frac{2\beta}{\nu}; \; A_2 = a_1 + \left(1 + \frac{2}{\nu}\right)\lambda; \; A_3 = a_4 - a_3\lambda + \beta\left(1 - a_1 - \lambda\left(1 + \frac{2}{\nu}\right)\right);$$

$$\beta = -(\lambda + \gamma + 2); \; \gamma = \frac{a_7}{a_3}, \text{ если } a_3 \neq 0.$$

Система (14) полезна для установления аналитических свойств решений уравнения (2).

Выделены дифференциальные уравнения вида (2), удовлетворяющие необходимым условиям (10)–(13):

$$y''' = 6y'^2, \tag{15}$$

$$y''' = 2yy'' + 2y'^2, \tag{16}$$

$$y''' = 12yy'' - 18y'^2, \tag{17}$$

$$y''' = 3\frac{y'y''}{y} - 2\frac{y'^3}{y^2} + yy'', \tag{18}$$

$$y''' = \frac{y'y''}{y} + yy'' + 2y'^2, \tag{19}$$

$$y''' = 2\frac{y'y''}{y} - \frac{y'^3}{y^2} + yy'' + y'^2, \tag{20}$$

$$y''' = 2\frac{y'y''}{y} + 2yy'' - 2y'^2, \tag{21}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + 4y'^3, \tag{22}$$

$$yy'y''' = \frac{1}{2}yy''^2 + y'^2y'' + y^2y'y'', \tag{23}$$

$$y'y''' = \frac{3}{4}y''^2 + 3y'^3, \tag{24}$$

$$y'y''' = y''^2 + 2y'^3, \tag{25}$$

$$y''' = 6yy'' + 6y'^2 - 12y^2y', \tag{26}$$

$$y''' = 6y^2y', \tag{27}$$

$$y''' = yy'' + 2y'^2 + 2y^2y', \tag{28}$$

$$y''' = 2yy'' + 4y'^2 - 2y^2y', \tag{29}$$

$$y''' = yy'' + 5y'^2 - y^2y', \tag{30}$$

$$y^2y''' = \frac{3}{2}yy'y'' - \frac{3}{4}y'^3 + \frac{3}{2}y^3y'' + \frac{3}{2}y^2y'^2 - \frac{3}{4}y^4y', \tag{31}$$

$$y^2y''' = \frac{7}{3}yy'y'' - \frac{4}{3}y'^3 + \frac{2}{3}y^3y'' + y^2y'^2 + \frac{1}{3}y^4y', \tag{32}$$

$$y^2y''' = \left(3 - \frac{2}{n}\right)yy'y'' + \left(\frac{2}{n} - 2\right)y'^3 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)y^3y'' - \frac{2}{n}y^4y' \tag{33}$$

при $n \in \mathrm{Z} \setminus \{-3; -1; 0\}$,

$$yy''' = 2y'y'' + 2y^3y', \tag{34}$$

$$yy''' = 2y'y'' + y^2y'' - yy'^2 + y^3y', \tag{35}$$

$$y^2y''' = 3yy'y'' - \frac{3}{2}y'^3 + \frac{3}{2}y^4y', \tag{36}$$

$$y^2y''' = 3yy'y'' - \frac{3}{2}y'^3 + y^3y'' - y^2y'^2 + \frac{1}{2}y^4y', \tag{37}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + yy'y'' + 3y'^3 - y^2y'^2, \tag{38}$$

$$y^2y'y''' = \frac{1}{2}y^2y''^2 + \frac{3}{2}yy'^2y'' - \frac{7}{8}y'^4 + \frac{1}{2}y^3y'y'' + \frac{3}{4}y^2y'^3 + \frac{1}{8}y^4y'^2, \tag{39}$$

$$y'y''' = \frac{2}{3}y''^2 + \frac{1}{3}yy'y'' + 3y'^3 - \frac{1}{3}y^2y'^2, \tag{40}$$

$$y'y''' = \left(1 - \frac{1}{(k-2)(k+1)}\right)y''^2 + \frac{4}{(k-2)(k+1)}yy'y'' + 2y'^3 - \frac{4}{(k-2)(k+1)}y^2y'^2, \tag{41}$$

$$k \in Z \setminus \{-1;2\},$$

$$y^2y''' = 3yy'y'' - \frac{2(n^2-1)}{n^2}y'^3 + y^3y'' - \frac{6}{n^2}y^2y'^2 + \frac{6}{n^2}y^4y' - \frac{2}{n^2}y^6, \tag{42}$$

$$n \in Z \setminus \{0, \pm 1, \pm 5\},$$

$$y^2y''' = \left(3 - \frac{1}{n}\right)yy'y'' - \left(2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)y'^3 + y^3y'' - \frac{3}{n(n+1)}y^2y'^2 + \tag{43}$$

$$+ \frac{3-n}{(n+1)^2}y^4y' - \frac{n}{(n+1)^3}y^6,$$

$$n \in Z \setminus \{0, -1, -4\},$$

$$y^2y''' = \left(3 - \frac{3}{n}\right)yy'y'' - \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)y'^3 + y^3y'' - \frac{3}{n(n+3)}y^2y'^2 + \tag{44}$$

$$- \frac{3+3n}{(n+3)^2}y^4y' - \frac{n}{(n+3)^3}y^6,$$

$$n \in Z \setminus \{-3, -2, -1\},$$

$$yy''' = y'y'' + 2y^2y'' + y^3y' - y^5, \tag{45}$$

$$yy''' = y'y'' + y^2y'' + 4y^3y' - 2y^5, \tag{46}$$

$$yy''' = 2y'y'' - y^2y'' + \frac{3}{2}yy'^2 + 2y^3y' + \frac{1}{2}y^5, \tag{47}$$

$$y^2y''' = \frac{14}{5}yy'y'' - \frac{44}{25}y'^3 + \frac{1}{5}y^3y'' + \frac{49}{50}y^2y'^2 + \frac{18}{25}y^4y' + \frac{3}{50}y^6, \tag{48}$$

$$yy''' = 2y'y'' - 2y^5, \tag{49}$$

$$yy''' = 2y'y'' - 2y^2y'' + 3yy'^2 + 2y^3y' + y^5, \tag{50}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + 5y^2y'^2 - y^6, \tag{51}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + \frac{5}{3}y'^3 + \frac{5}{2}y^2y'^2 - \frac{1}{6}y^6, \tag{52}$$

$$yy'y''' = \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)yy''^2 + y'^2y'' + \left(1 - \frac{2}{\nu}\right)y^4y'' + \left(\frac{9}{\nu} - 2\right)y^3y'^2 - \frac{1}{\nu}y^7, \ \nu = 2, 3, \tag{53}$$

$$y'y''' = \frac{4}{5}y''^2 - \frac{3}{10}yy'y'' + \frac{113}{36}y'^3 + \frac{1}{10}y^3y'' + \frac{7}{60}y^2y'^2 - \frac{1}{20}y^4y' - \frac{1}{180}y^6, \qquad (54)$$

$$y^2y''' = 2yy'y'' - \frac{10}{9}y'^3 - \frac{140}{39}y^2y'^2 + \frac{3920}{39}y^4y' - \frac{10976}{117}y^6. \qquad (55)$$

Замечание 1. Уравнения (15) – (17), (26) – (30) являются полиномиальными уравнениями со свойством Пенлеве [5]; уравнения (18), (20), (42) – (46) содержатся в работе [6] и имеют свойство Пенлеве, уравнения (19), (21) свойства Пенлеве не имеют [6]; уравнения (31), (33), (34), (36) содержатся в статье [7], имеют свойство Пенлеве, уравнение (40) также содержится в работе [7], однако аналитические свойства его решений не указаны. Уравнения (51), (52), (54) содержатся в статье [8], однако в записи уравнений (51), (52) и в доказательстве мероморфности их решений имеются неточности, аналитические свойства решений уравнения (54) не указаны. Уравнения (35), (37) содержатся в работе [7], уравнениями со свойством Пенлеве не являются, так как не проходят тест Пенлеве.

Теорема 1 [2, 3, 7, 9, 12, 13, 16, 18, 20]. Справедливы следующие утверждения:

1) общие решения уравнений (22), (24), (25), (32), (38), (40), (47) – (53) являются мероморфными;

2) для уравнения (55) выполнены необходимые условия леммы 1 и леммы 2;

3) общие решения уравнений уравнения (23), (39), (41) содержат логарифмы;

4) уравнение (54) имеет подвижную особую линию.

В случае $\nu = 1$ и $2a_1 + a_2 = 6$ имеет место

Теорема 2 [1, 11]. Если для уравнения (2) выполнено условие $\nu = 1$, $2a_1 + a_2 = 6,\ a_5 = a_8 = 0,\ |a_7| + |a_6| + |2a_3 + a_4| \neq 0$, то это уравнение не имеет свойства Пенлеве.

---

[5] Chazy, J. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317 – 385.

[6] Мартынов, И.П. Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей / И.П. Мартынов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 6. – С. 937 – 946.

[7] Mugan, U. Non-polynomial third order equations which pass the Painlevé test / U. Mugan, F. Jrad // Z. Naturforsch. A. – 2004. – V. 59a. – P. 163 – 180.

[8] Adjabi, Y. Third order differential equations with fixed critical points / Y. Adjabi, A. Kessi, U. Mugan // Stud. App1. Math. – 2009. – Vol. 208, № 1. – P. 238 – 248.

В **разделе 2.2** рассматривается уравнение вида (3) при $|a_3|+|a_4|+|a_5|\neq 0$. Если искать решение уравнения (3) в виде ряда (7), то при $s=2$ получим

$$b_2(\alpha)=a_5\alpha^2+4(a_4+3a_3)\alpha-2\left(6+\frac{18}{\nu}-12a_1-8a_2\right).$$

Имеют место

Лемма 4 [15]. Для того чтобы уравнение (3) при $\nu\neq 1, a_5\neq 0$ и $N_1+N_2\neq 0$ не имело подвижных многозначных особых точек, необходимо выполнение следующих условий:

1) $2\nu(M_2-M_1)^2+(\nu-2)^2(N_1+N_2)=0$;

2) $a_3=\dfrac{N_1}{N_1+N_2}(M_2-M_1)$; $a_4=-\dfrac{N_1(6(M_2-M_1)-(N_2-N_1))}{2(N_1+N_2)}$; $a_5=\dfrac{2N_1^2}{N_1+N_2}$.

Лемма 5. Для того чтобы уравнение (3) имело свойство Пенлеве, необходимо выполнение условий:

1) при $\nu\neq 1$, $\nu\neq\infty$ коэффициенты a_3, a_5 связаны соотношением

$$\frac{4}{\nu}a_3^2+\left(1-\frac{2}{\nu}\right)^2a_5=0;$$

2) $a_3=a_5=0$ при $\nu=1$;

3) $a_3\cdot a_5=0$ при $\nu=\infty$.

Лемма 6. Уравнение (3) можно заменить эквивалентной системой

$$y'=-ny\upsilon,\ u'=-\beta nu\upsilon+u^2-\frac{\delta}{\nu}y,\ \upsilon'=-\nu u\upsilon+\upsilon^2+\frac{\gamma}{n}y. \tag{56}$$

где $\beta=a_1+\left(1+\dfrac{2}{\nu}\right)\lambda$, $\lambda=\dfrac{1}{n}-1, \delta=a_4+\gamma(2-a_1-\lambda)$, $a_5=-\dfrac{\gamma^2}{\nu}$.

Система (56) полезна для установления аналитических свойств решений уравнения (3).

Согласно необходимым условиям леммы 4 и леммы 5 были выделены следующие уравнения вида (3):

$$y'''=\frac{3}{2}\frac{y'y''}{y}-\frac{3}{4}\frac{y'^3}{y^2}+6yy', \tag{57}$$

$$y'''=\frac{y'y''}{y}+6yy', \tag{58}$$

$$y'''=5\frac{y'y''}{y}-4\frac{y'^3}{y^2}-2yy', \tag{59}$$

$$y'''=2\frac{y'y''}{y}-\frac{y'^3}{y^2}+4yy', \tag{60}$$

$$y'''=\frac{5}{2}\frac{y'y''}{y}-\frac{3}{2}\frac{y'^3}{y^2}+3yy', \tag{61}$$

$$y''' = \frac{7}{2}\frac{y'y''}{y} - \frac{5}{2}\frac{y'^3}{y^2} + yy', \tag{62}$$

$$y''' = 4\frac{y'y''}{y} - 2\frac{y'^3}{y^2} - 4yy', \tag{63}$$

$$y''' = \frac{5}{2}\frac{y'y''}{y} - \frac{5}{4}\frac{y'^3}{y^2} + 2yy', \tag{64}$$

$$y''' = 3\frac{y'y''}{y} - 6yy', \tag{65}$$

$$y''' = 3\frac{y'y''}{y} - \frac{15}{8}\frac{y'^3}{y^2} + \frac{3}{2}yy', \tag{66}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + 9yy'^2 - 6y^4, \tag{67}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + 10yy'^2 - 10y^4, \tag{68}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + \frac{y'^2y''}{y} - \frac{5}{8}\frac{y'^4}{y^2} + 5yy'^2 - 4y^4, \tag{69}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + 4\frac{y'^2y''}{y} - 4\frac{y'^4}{y^2} - 2y^4, \tag{70}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + \frac{y'^2y''}{y} + 6y^4, \tag{71}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + \frac{3}{2}\frac{y'^2y''}{y} - \frac{7}{8}\frac{y'^4}{y^2} + \frac{5}{2}yy'^2 - 2y^4, \tag{72}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + 3\frac{y'^2y''}{y} - 2\frac{y'^4}{y^2} - 2yy'^2 - 2y^4, \tag{73}$$

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + 2\frac{y'^2y''}{y} - 18y^4, \tag{74}$$

$$y'y''' = \frac{2}{3}y''^2 + \frac{4}{3}\frac{y'^2y''}{y} - \frac{5}{6}\frac{y'^4}{y^2} + \frac{2}{3}y^2y'' + \frac{2}{3}yy'^2 - \frac{4}{3}y^4, \tag{75}$$

$$y'y''' = \frac{2}{3}y''^2 + 2y^2y'' + 6yy'^2 - 12y^4, \tag{76}$$

$$y'y''' = y''^2 + \frac{3}{2}\frac{y'^2y''}{y} - \frac{3}{2}\frac{y'^4}{y^2} + 2b\,y^2y'' - 3b\,yy'^2,\ b = const, \tag{77}$$

$$y'y''' = y''^2 + 2\frac{y'^2y''}{y} - 2\frac{y'^4}{y^2} + 2\,y^2y'' - 4yy'^2, \tag{78}$$

$$y'y''' = y''^2 - 2\,y^2y'' + 6\,yy'^2, \tag{79}$$

$$y'y''' = y''^2 - 6\,y^2y'' + 12\,yy'^2, \tag{80}$$

$$y'y''' = y''^2 + 18\,y^2y'' - 24\,yy'^2, \tag{81}$$

$$y'y''' = y''^2 + \frac{1}{2}\frac{y'^2 y''}{y} - \frac{1}{2}\frac{y'^4}{y^2} - 4y^2y'' + 8yy'^2, \tag{82}$$

$$y'y''' = y''^2 + \frac{3}{4}\frac{y'^2 y''}{y} - \frac{3}{4}\frac{y'^4}{y^2} - 3y^2y'' + 6yy'^2, \tag{83}$$

$$y'y''' = y''^2 + \frac{y'^2 y''}{y} + 2y^2y'' - 6yy'^2, \tag{84}$$

$$y'y''' = y''^2 + \frac{y'^2 y''}{y} + 6y^2y'' - 12yy'^2, \tag{85}$$

$$y'y''' = y''^2 + \frac{y'^2 y''}{y} - \frac{3}{4}\frac{y'^4}{y^2} + 2b\,y^2y'' - 3b\,yy'^2,\ b = const. \tag{86}$$

Замечание 2. Уравнение (3) при $\nu = 1$(уравнения (57) – (66)) рассмотрено в статье[9], однако уравнения (59), (63), (65) отсутствуют; уравнения (67), (68) содержатся в работе[10], а уравнения (84), (85) содержатся в работе[11], решения данных уравнений мероморфны. Уравнения (77), (86) при $b \neq 0$ не имеют свойства Пенлеве, а при $b = 0$ не выполняется условие $|a_3| + |a_4| + |a_5| \neq 0$.

Теорема 3 [12, 15, 17]. Справедливы следующие утверждения:

1) уравнения (59), (63), (65), (69) – (76), (78), (79) имеют только мероморфные решения;

2) общие решения уравнений (80), (82), (83), а также (77) и (86) при $b \neq 0$ содержат логарифмы;

3) уравнение (81) имеет подвижную особую линию.

Раздел 2.3 посвящен изучению аналитических свойств решений уравнения (4).

Если искать решение уравнения (4) в виде ряда (7), то при $s = 3$ получим

$$b_3(\alpha) = \alpha\, a_3 + 3\left(4 + \frac{16}{\nu} - 12a_1 - 9a_2\right).$$

Были получены следующие уравнения вида (4):

$$y^2y''' = 6yy'y'' - 6y'^3 - 6y^4 + 12yy'; \tag{87}$$

$$y^2y''' = 6yy'y'' - 6y'^3 - 6y^4 + 6ay^2y' - 6by^3 - 6y'^2 + 6ay^2, \tag{88}$$

---

[9] Mugan, U. Non-polynomial third order equations which pass the Painlevé test / U. Mugan, F. Jrad // Z. Naturforsch.A. – 2004. – V. 59a. – P. 163 – 180.

[10] Cosgrove, C.M. Higher–order Painlevé equations in the polynomial class I. Bureau symbol P2 variables / C.M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 2000. – P. 1 – 76.

[11] Мартынов, И.П. . Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей / И.П. Мартынов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 6. – С. 937 – 946.

где функции a и b удовлетворяют условиям $a''=6a^2; b''=3b^3$;

$$y^2y'''=6yy'y''-6y'^3-6y^4-12ay^2y'+2yy''-\left(6+\frac{24}{1-k^2}\right)y'^2-12ay^2- \quad (89)$$

$$-\frac{48}{1-k^2}y'-\frac{24}{1-k^2},$$

где $a=0$, если $k=6m+2$, $m\in\mathrm{N}$; $a=const$, если $k=6m+3$;

$$y^2y'''=6yy'y''-6y'^3-6y^4-12ay^2y'+2yy''-6y'^2-12ay^2, \quad (90)$$

$$y^2y'''=6yy'y''-6y'^3-6y^4-ay^3+12yy''-33y'^2-54y'-27, \quad (91)$$

$$y^2y'''=6yy'y''-6y'^3-6y^4+12yy''-38y'^2-64y'-32, \quad (92)$$

$$y^2y'''=6yy'y''-6y'^3-6y^4+ay^2y'-a'y^3+3yy''-9y'^2-3y', \quad (93)$$

где a является любой аналитической функцией переменной z;

$$y^2y'''=6yy'y''-6y'^3-6y^4-12y'^2+72y'-54; \quad (94)$$

$$yy'''=y'y''-24y^3+6p_1y^2+\left(-3p_1^2z+p_2\right)y'+3p_1^2y, \quad (95)$$

где p_1, p_2 – постоянные;

$$y^2y'''=4yy'y''-2y'^3+30y^4+p\,y^2y'+yy''-\frac{1}{2}y'^2+\frac{1}{2}py^2+2y'+\frac{1}{2}, \quad (96)$$

$$y^2y'''=\frac{8}{3}yy'y''-\frac{14}{9}y'^3-6y^4+2pyy''-3py'^2+6p^2y'+3p^3, \quad (97)$$

где p – постоянная;

$$y^2y'y'''=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)y^2y''^2+\left(2+\frac{4}{\nu}\right)yy'^2y''-\left(2+\frac{4}{\nu}\right)y'^4+6\left(1-\frac{2}{\nu}\right)y^4y', \quad (98)$$

где $\nu\in\{-2,-4,4,\infty\}$.

Замечание 3. Уравнения (95) и (97), а также (96) при $p=0$ были рассмотрены в работе[12], однако в их записи были допущены неточности, а также авторами не были указаны аналитические свойства решений данных уравнений.

Теорема 4 [5, 14, 19] . Общие решения уравнений (87)–(98) мероморфны.

Раздел 2.4 посвящен изучению аналитических свойств решений уравнения (5) при $\nu\neq 1$.

Если искать решение уравнения (5) в виде ряда (7), то при $s=4$ получим

$$b_4(\alpha)=a_3\alpha-8\left(10+\frac{50}{\nu}-40a_1-32a_2\right).$$

При $\nu\neq 1$ были получены следующие уравнения вида (5):

[12] Mugan, U. Non-polynomial third order equations which pass the Painlevé test / U. Mugan, F. Jrad // Z.Naturforsch.A. – 2004. – V. 59a. – P. 163–180.

$$y'y''' = \frac{3}{2}y''^2 - 120y^3 - 6ay'^2, \tag{99}$$

$$y^2y'y''' = \frac{3}{2}y^2y''^2 - \frac{3}{8}y'^4 - 24y^5 - 6ay^2y'^2, \tag{100}$$

$$y^2y'y''' = \frac{1}{2}y^2y''^2 + 4yy'^2y'' - 4y'^4 + 24y^5 + 24ay^4, \tag{101}$$

$$y^2y'y''' = \frac{1}{2}y^2y''^2 + 3yy'^2y'' - \frac{21}{8}y'^4 - 8y^5 - 8ay^4, \tag{102}$$

$$y^2y'y''' = \frac{1}{2}y^2y''^2 + \frac{3}{2}yy'^2y'' - \frac{7}{8}y'^4 + 24y^5 + 24ay^4, \tag{103}$$

$$y^2y'y''' = \frac{1}{2}y^2y''^2 + 2yy'^2y'' - \frac{9}{8}y'^4 - 72y^5 - 72ay^4, \tag{104}$$

где $a = const$;

$$y^2y'y''' = y^2y''^2 + \frac{3}{2}yy'^2y'' - \frac{3}{2}y'^4 - 16y^5. \tag{105}$$

Теорема 5 [8]. Общие решения уравнений (99) – (105) мероморфны.

В главе 3 рассматривается дифференциальное уравнение вида (6).

При $n = 1$ уравнение (6) является уравнением Шази[13] с подвижной особой линией, а при $n = 2$ масштабным преобразованием оно приводится к виду (7.180) из работы[14].

Теорема 6 [4, 6]. Имеют место следующие утверждения:
1) все резонансы r уравнения (6) отрицательны и равны $-\nu$, $\nu = \overline{1, 2n+1}$;
2) уравнение (6) имеет рациональное решение

$$y = -(n+1)(2n+2)\left(\frac{1}{z-z_0} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(z-z_0)^{k+1}}\right),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ - произвольные постоянные;
4) ряд

$$y = -(n+1)(2n+1)\left((z-z_0)^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{(z-z_0)^{k+1}}\right)$$

представляет решение уравнения (6) в области $|z - z_0| > \delta, \delta > 0$, причем коэффициенты $\alpha_k, k = \overline{1, 2n+1}$ являются произвольными постоянными, а остальные коэффициенты определяются единственным образом по рекуррентным формулам

---

[13] Chazy, J. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d’ordre supérieur dont 1'intégrale générale a ses points critiques fixes / J. Chazy //Acta Math. – 1911. – Vol.34. – P. 317–385.

[14] Cosgrove, C.M. Higher-order Painlevé equations in the polynomial class II. Bureau symbol P1 variables / C.M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. ─ 2006. ─ V. 116. ─ P. 321─413.

$$\frac{1}{n+1}\left(C_{2n+k+1}^{k}-\sum_{m=0}^{2n}(-1)^{m}C_{2n+2}^{m+1}C_{m+k}^{m}\right)\alpha_k=\sum_{l=1}^{k-1}\left(C_k^l C_{2n+k}^{k}\sum_{m=0}^{2n}\frac{b_m}{C_{2n+k}^{m+l}}\right)\alpha_l\alpha_{k-l},$$

$k=2,3,4,\ldots;$ α_1 – произвольное постоянное;

4) уравнение (6) имеет трехпараметрическое решение, которое можно представить в виде ряда

$$y=-\frac{(n+1)(2n+1)}{z-z_1}+\frac{h}{2(z-z_1)^2}-\frac{h}{(z-z_1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\gamma^k e^{-\frac{kh}{z-z_1}}, \tag{106}$$

где γ, h, z_1 – произвольные постоянные, имеющего место в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением

$$2cz\bar{z}-(2cz_1+h)\bar{z}-\left(2c\overline{z_1}+\bar{h}\right)z+2cz_1\overline{z_1}+h\overline{z_1}+\bar{h}z_1=0.$$

Координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для членов ряда (106).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Выделены уравнения вида (2) – (5), имеющие мероморфные решения, а также уравнения, удовлетворяющие необходимым условиям наличия свойства Пенлеве [1, 2, 3, 5, 9 – 14,16, 17, 19, 20].
2. Построены преобразования Беклунда для установления аналитических свойств решений дифференциальных уравнений вида (2) – (5). Получены 2 уравнения с подвижной особой линией. [7, 8, 15, 18].
3. Найдена структура резонансов уравнения (6); построены $(n+1)$ – параметрические рациональные решения уравнения (6); доказана сходимость рядов Лорана, представляющих решение данного уравнения; построены трехпараметрические решения уравнения (6) с подвижной особой линией [4, 6].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы при чтении спецкурсов и проведении спецсеминаров по теории дифференциальных уравнений. Результаты могут быть использованы при решении круга нелинейных задач в области гидродинамики, физики плазмы, нелинейной оптики и физики твердого тела.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных изданиях, соответствующих п. 18 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь

1. Ванькова, Т.Н. О свойствах решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2007. – № 2 (52). – С. 8 – 15.
2. Ванькова Т.Н. Аналитические свойства решений некоторых классов дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2007. – №4 (61). – С. 11 – 18.
3. Ванькова, Т.Н. О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов, О.Н. Парманчук, В.А. Пронько // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2008. – № 1 (64). – С. 8 – 16.
4. Ванькова, Т.Н. О дифференциальных уравнениях с отрицательными резонансами / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2008. – № 2 (68). – С. 32 – 37.
5. Ванькова, Т.Н. Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2008. – № 3(73). – С. 26 – 35.
6. Ванькова Т.Н. Об одном обобщении уравнения Шази с подвижной особой линией / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т.45, № 8. – С. 1085 – 1094.
7. Ванькова, Т.Н. О свойствах решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2011. – №2 (111). – С. 27 – 35.
8. Ванькова, Т.Н. Мероморфные решения уравнения третьего порядка с символом Бюро P4 / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2011. – № 3 (118). – С. 58 – 66.
9. Ванькова, Т.Н. О мероморфности решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2013. – № 2 (151). – С. 37 – 43.

Материалы научных конференций

10. Ванькова, Т.Н. Необходимые условия наличия свойства Пенлеве для дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова // Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования: сб. науч. тр. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: Ю.М. Вувуникян (отв. ред.) [и др.]. – Гродно: ГрГУ, 2007. – С. 27 – 29.

Тезисы докладов научных конференций

11. Ванькова, Т.Н. Аналитические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений / Т.Н. Ванькова // Еругинские чтения –2007 : тез. докладов XII Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Минск, 16 – 19 мая 2007 г. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2007. – С. 11 – 12.

12. Ванькова, Т.Н. Аналитические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тез. докладов Первой Междунар. конф., Минск, 2 – 5 октября 2007 г. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2007. – С. 67.

13. Ванькова, Т.Н. Об одном классе полубарьерных уравнений / Т.Н. Ванькова // Еругинские чтения–2009: тез. докладов XIII Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнения, Пинск, 26 – 29 мая 2009 г. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2009. – С. 6 – 7.

14. Ванькова, Т.Н. Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н.Ванькова // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тез. докладов Междунар. математ. науч. конф. Минск, 7 – 10 декабря 2010 г. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 5 – 6.

15. Ванькова, Т.Н. Об одном классе уравнений третьего порядка без подвижных многозначных особых точек / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Еругинские чтения – 2011: тез. докладов XII Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 12 – 14 мая 2011г. / Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2011. – С. 7 – 8.

16. Ванькова, Т.Н. Аналитические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тез. докл. Междунар. конф., Минск, 12 – 17 сент. 2011 г. – Минск: ИМ НАНБ, 2011. – С. 35 – 36.

17. Ванькова, Т.Н. Об аналитических свойствах решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н.Ванькова, И.П. Мартынов // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. Междунар. науч. семинара, Минск, 10 – 14 сент. 2012 г. – Минск: ИМ НАНБ, 2012. – С. 18 – 19.

18. Ванькова, Т.Н. О способе установления аналитических свойств решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тез. докл. Третьей Междунар. науч. конф., Брест, 17 – 22 сентября 2012 г. / Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина; редкол.: В.И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. – Брест: БрГУ, 2012. – С. 54 – 55.

19. Ванькова, Т.Н. Мероморфные решения уравнения третьего порядка с символом Бюро Р3 / Т.Н. Ванькова // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. конф., Минск, 4 – 9 ноября 2012 г. – Часть 2. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2012. – С. 13 – 14.

20. Ванькова, Т.Н. О мероморфности решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Еругинские чтения – 2013: тез. докл. XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Гродно, 13 – 16 мая 2013 г. – Часть 1. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2013. – С. 11 – 12.

РЭЗЮМЭ

Ванькова Таццяна Мікалаеўна
Аналітычныя ўласцівасці рашэнняў некаторых класаў дыферэнцыяльных ураўненняў трэцяга і вышэйшых парадкаў

Ключавыя словы: дыферэнцыяльнае ўраўненне, мераморфныя рашэнні, пераўтварэнні Бэклунда, рацыянальнае рашэнне, уласцівасць Пенлеве.

Аб'ект даследавання: дыферэнцыяльныя ўраўненні трэцяга і вышэйшых парадкаў з рацыянальнай правай часткай. Прадмет даследавання – аналітычныя ўласцівасці рашэнняў дадзеных ураўненняў.

Мэта даследавання: вылучэнне класаў дыферэнцыяльных ураўненняў трэцяга парадку без рухомых мнагазначных асаблівых пунктаў, а таксама вывучэнне аналітычных уласцівасцяў рашэнняў дыферэнцыяльных ураўненняў няцотнага парадку, якія з’яуляюцца абагульненнем ўраўнення Шазі з рухомай асаблівай лініяй.

Метады даследавання: выкарыстоўваліся класічныя метады аналітычнай тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў (метад малога параметру, метад параўнанняў, метад рэзанансаў), а таксама метад пабудовы пераўтварэнняў Бэклунда.

Атрыманыя вынікі і іх навізна:

- знойдзены неабходныя ўмовы адсутнасці мнагазначных асаблівых пунктаў рашэнняў дыферэнцыяльных ураўненняў трэцяга парадку пэўнага віду;
- з дапамогай пабудовы пераўтварэнняў Бэклунда для вылучаных ураўненняў, якія задавальняюць неабходным ўмовам адсутнасці рухомых крытычных пунктаў, даказана мераморфнасць іх агульных рашэнняў;
- атрыманы дыферэнцыяльныя ўраўненні няцотнага парадку з рухомай асаблівай лініяй, вызначана структура мноства рэзанансаў гэтых ураўненняў, пабудаваны $(n+1)$ – параметрычныя рацыянальныя рашэнні.

Рэкамендацыі па выкарыстанні і вобласць прымянення. Вынікі дысертацыі носяць тэарэтычны характар. Яны могуць быць выкарыстаны ў аналітычнай тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў, на лекцыях і практычных занятках пры чытанні спецкурсаў і правядзенні спецсемінараў па тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў. Вынікі могуць быць выкарыстаны пры рашэнні шэрага нелінейных задач у галіне гідрадынамікі, фізікі плазмы, нелінейнай оптыкі і фізікі цвёрдага цела.

РЕЗЮМЕ

Ванькова Татьяна Николаевна
Аналитические свойства решений некоторых классов дифференциальных уравнений третьего и высших порядков

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, мероморфные решения, преобразования Беклунда, рациональное решение, свойство Пенлеве.

Объект исследования: дифференциальные уравнения третьего и высших порядков с рациональной правой частью. Предмет исследования – аналитические свойства решений данных уравнений.

Цель исследования: выделение классов дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных многозначных особых точек, а также изучение аналитических свойств решений дифференциальных уравнений нечетного порядка, которые являются обобщением уравнения Шази с подвижной особой линией.

Методы исследования: использовались классические методы аналитической теории дифференциальных уравнений (метод малого параметра, метод сравнений, метод резонансов), а также метод построения преобразований Беклунда.

Полученные результаты и их новизна:

- найдены необходимые условия отсутствия многозначных особых точек у решений дифференциальных уравнений третьего порядка определенного вида;
- с помощью построения преобразований Беклунда для выделенных уравнений, удовлетворяющих необходимым условиям отсутствия подвижных критических точек, доказана мероморфность их общих решений;
- получены дифференциальные уравнения нечетного порядка с подвижной особой линией, определена структура множества резонансов этих уравнений, построены $(n+1)$ – параметрические рациональные решения.

Рекомендации по использованию и область применения. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в аналитической теории дифференциальных уравнений, на лекциях и практических занятиях при чтении спецкурсов и проведении спецсеминаров по теории дифференциальных уравнений. Результаты могут быть использованы при решении круга нелинейных задач в области гидродинамики, физики плазмы, нелинейной оптики и физики твердого тела.

SUMMARY

Tatiana N. Vankova

Analytical properties of solutions of certain classes of differential equations of the third and higher order

Keywords: differential equation, meromorphic solutions, Backlund transformation, rational decision Painlevé property.

The object of the study: differential equations of the third and higher order with a rational right-hand side. The subject of the study- analytic properties of solutions of these equations.

The purpose of the study: the selection of classes of differential equations of the third order with no moving valued singular points, and the study of the analytic properties of solutions of differential equations of odd order, which is a generalization of the Chazy-equations with movable singular line.

Methods: classical methods used in the analytic theory of differential equations (the small parameter method, the method of comparison, the method of resonance), and the method of construction of Backlund transformations.

The results obtained and their novelty:

- necessary conditions for the absence of multi-valued singular points of solutions of differential equations of the third order of a certain kind were found;
- with the construction of Backlund transformations for the selected equations that satisfy the necessary conditions for the absence of movable critical points, meromorphic general solutions of this equations were proved;
- differential equations of odd order with a movable singular line were obtained, the structure of the set of resonances was determined, of these equations are constructed $(n+1)$ – the rational parametric solutions were constructed .

Recommendations on the use and application area. The results of the thesis are theoretical. They can be used in the analytic theory of differential equations, in lectures and practical classes in reading courses and holding seminars on the theory of differential equations. The results can be used to solve the set of nonlinear problems in fluid dynamics, plasma physics, nonlinear optics and solid state physics.