Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.925

ВАРЕНИКОВА
Елена Владимировна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ В СМЫСЛЕ СОВПАДЕНИЯ ОТРАЖАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

Гродно, 2012

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Научный руководитель:

Мироненко Владимир Иванович,
кандидат физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры дифференциальных уравнений
и теории функций учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Официальные оппоненты:

Лаптинский Валерий Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник лаборатории
модифицирования сплавов государственного научного
учреждения «Институт технологии металлов НАН
Беларуси»;

Деменчук Александр Константинович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных
уравнений государственного научного учреждения
«Институт математики Национальной академии наук
Беларуси»

Оппонирующая организация:

Белорусский государственный университет

Защита состоится 25.01.2013, в 10.00, на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209
Телефон ученого секретаря: (+375 152) 74 43 76; (+375 152) 73 19 26
E–mail: V.A.Pronko@gmail.com; n.nech@grsu.by

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГрГУ им. Я. Купалы
Автореферат разослан 21.12.2012

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций К 02.14.02 В.А. Пронько

ВВЕДЕНИЕ

Реальные системы с одной степенью свободы моделируются с помощью двумерных систем дифференциальных уравнений. При этом, если на моделируемую систему оказывается внешнее воздействие, то соответствующая дифференциальная система является неавтономной. Это приводит к необходимости рассмотрения двумерных неавтономных дифференциальных систем. Этому и посвящена данная работа.

При исследовании этих систем огромное внимание уделяется их периодическим решениям, так как периодические решения описывают установившиеся режимы функционирования реальных систем. На огромную роль периодических решений дифференциальных систем указал А. Пуанкаре[1]. Им же был разработан ряд методов отыскания периодических решений дифференциальных систем. При этом методы исследования периодических решений неавтономных систем отличаются от методов исследования автономных систем, изучению которых посвящено огромное количество работ, в том числе и белорусских математиков (см. по этому поводу, например, книгу[2]).

Исследование вопросов существования и устойчивости предельных циклов автономных систем с помощью замены переменных и так называемого отображения Пуанкаре иногда удается свести к исследованию неавтономных дифференциальных уравнений.

Для изучения периодических решений неавтономных периодических систем было введено понятие отображения за период.

Отображение за период для 2ω-периодической по времени системы

$$\frac{dx}{dt} = X(\mathrm{t}, \mathrm{x}), \quad \mathrm{t} \in \mathrm{R}, \quad \mathrm{x} \in D \subset R^n, \tag{1}$$

с общим решением в форме Коши $\varphi(t;\ t_0,\ x_0)$ определяется обычно формулой $\Pi(x) := \varphi(2\omega;\ 0,\ x)$. Зная отображение за период, можно полностью решить вопросы существования, локализации и устойчивости 2ω-периодических решений системы (1). Создаётся впечатление, что отображение за период можно найти только тогда, когда система (1) может быть проинтегрирована

---

[1] Пуанкаре, А. Избранные труды: в 3 т. / А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1971 – 1974. – Т.1: Новые методы небесной механики. – 1971. – 771 с.

[2] Амелькин, В.В. Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1982. – 208 с.

хотя бы в квадратурах. Это мнение, как показал В.И. Мироненко, ошибочно. В своей работе[3] он ввёл понятие отражающей функции.

Для системы (1) с общим решением $\varphi(t;\ t_0,\ x_0)$ отражающая функция $F(t,\ x)$ определяется формулой

$$F(t,\ x) := \varphi(-t;\ t,\ x).$$

Из этого определения следует, что для любого решения $x(t)$ системы (1), определённого при $t = 0$, верно тождество

$$x(-t) \equiv F(t,\ x(t)),$$

позволяющее по состоянию $x(t)$ находить состояние системы в симметричный момент времени $x(-t)$. Поэтому если, вопреки традиции, вместо отображения за период $[0;\ 2\omega]$ рассматривать отображение за период $[-\omega;\ \omega]$, то последнее будет задаваться формулой $\Pi(x) := F(-\omega,\ x)$.

Дифференцируемая функция $F(t,\ x)$ является отражающей функцией для системы (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t,x) + X(-t,F) = 0, \qquad F(0,x) \equiv x. \tag{2}$$

Из этого соотношения, в частности, следует, что всякая, в том числе и неинтегрируемая в квадратурах, система вида (1) с нечетной по t правой частью $X(t,x)$ имеет функцию $F(t,x) \equiv x$ в качестве своей отражающей функции. А это и доказывает, что отображение за период $[-\omega;\ \omega]$ мы иногда можем найти и для неинтегрируемых в квадратурах систем.

Позже было доказано[4], что если $\Delta_1(t,x), \Delta_2(t,x), ..., \Delta_r(t,x)$ есть решения системы в частных производных

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} X(t,x) - \frac{\partial X}{\partial x}(t,x) \cdot \Delta(t,x) = 0, \tag{3}$$

то все системы вида

---

[3] Мироненко, В.И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. Мироненко // Дифференц. уравнения. –1984. – Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.

[4] Мироненко, В.В. Возмущения нелинейных дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 10. – С. 1325–1332.

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(t)\Delta_i(t,x)\,, \tag{4}$$

имеют такую же отражающую функцию, как и система (1). В своей работе мы существенно будем использовать этот результат.

Основные результаты по теории отражающей функции можно найти в монографии[5] и на сайте http://reflecting-function.narod.ru. Эти результаты можно применять для исследования двухточечных краевых задач и, в частности, периодических решений систем дифференциальных уравнений.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Диссертационное исследование началось в 2004 года и проводилось на кафедре дифференциальных уравнений учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» при выполнении темы ГБЦМ № 01-51 Ф «Структурно связанные дифференциальные системы» в рамках ГПФИ «Математические структуры 04» (с 01.01.2001г по 31.12.2005), координируемой Институтом математики НАН Беларуси; затем работа продолжалась на кафедре математики, физики и информатики филиала Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского в г. Новозыбкове в рамках внутривузовского научного гранта 2009 года «Симметрии дифференциальных систем» в тесной связи с тематикой кафедры дифференциальных уравнений учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является нахождение начальных данных решений двухточечных краевых задач неавтономных дифференциальных двумерных систем с квадратичными и кубическими относительно координат фазового вектора правыми частями.

---

[5] Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.

Для достижения цели решались следующие задачи:

1. Построение неавтономных двумерных полиномиальных дифференциальных систем, отражающая функция которых совпадает с отражающей функцией соответствующей линейной системы.

2. Построение множества периодических дифференциальных двумерных систем с полиномиальной относительно координат фазового вектора правой частью, эквивалентных в смысле совпадения отражающих функций и отображений за период системе гармонических колебаний.

3. Построение уравнений для нахождения начальных данных решений двухточечных краевых задач для выделенных систем.

Объект исследования – неавтономные двумерные дифференциальные системы с полиномиальными относительно координат фазового вектора правыми частями.

Предмет исследования – решения двухточечных краевых задач для неавтономных дифференциальных систем.

Положения, выносимые на защиту

1. Множество неавтономных дифференциальных двумерных полиномиальных систем, отражающая функция которых совпадает с отражающей функцией соответствующей линейной системы.

2. Множество периодических дифференциальных двумерных систем с полиномиальной относительно координат фазового вектора правой частью, эквивалентных в смысле совпадения отражающих функций системе гармонических колебаний.

3. Уравнения для определения начальных данных решений двухточечных краевых задач.

Личный вклад соискателя

Все результаты работы получены автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты, вошедшие в диссертацию, обсуждались на следующих научных конференциях: XII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2007» (Минск, 16 – 19 мая 2007), XI Международной научно-методической конференции «Актуальные проблемы науки и образования» (Новозыбков, 22-23 октября 2008), XIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2009» (Пинск, 26 – 29 мая 2009), Украинском Математическом Конгрессе – 2009 (Киев: Институт математики НАН Украины, 27 – 29 августа 2009), Международной научно-практической конференции «Российско-белорусско-украинское пограничье: аспекты взаимодействия в контексте единого социокультурного пространства – история и перспективы» (Новозыбков, 21 – 22 октября 2010), Международной математической конференции «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 7 – 10 декабря 2010), Международной научно-практической конференции «Российско-белорусско-украинское пограничье: 25-летие экологических и социально-педагогических проблем в постчернобыльский период» (Новозыбков, 26–27 апреля 2011), XIV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2011» (Новополоцк, 12 – 14 мая 2011).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 научных работах, из которых 5 статей в научных изданиях, соответствующих п. 18 «Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь» (общим объемом 0,89 авт. л.), 1 статья в научном журнале, 3 материалов и 4 тезисов докладов научных конференций.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, трёх глав, заключения и библиографического списка, содержащего 84 наименования (включая 13 собственных публикаций соискателя). Полный объём диссертации составляет 105 страниц, из них 7 страниц занимает библиографический список.

Первая глава посвящена обзору литературы по теме исследования. В ней рассматриваются методы исследования дифференциальных систем с периодической по времени правой частью, а также даётся краткий обзор результатов, полученных в диссертации.

Во второй главе с помощью отражающей функции и симметрий ею улавливаемых проводятся исследования неавтономных дифференциальных систем с квадратичной относительно координат фазового вектора правой частью.

В третьей главе с помощью тех же методов, что и в главе 2, проводятся исследования неавтономных дифференциальных систем с кубической относительно координат фазового вектора правой частью.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 содержит обзор методов исследования периодических по времени дифференциальных систем наиболее близких к теме диссертации.

Глава 2 посвящена исследованию неавтономных дифференциальных систем с квадратичной относительно координат фазового вектора правой частью. Эти исследования проводятся с помощью метода отражающей функции и симметрий, ею улавливаемых. Вначале строится множество систем вида

$$\frac{dx}{dt} = by + X(t,x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = cx + Y(t,x,y), \tag{5}$$

с такой же отражающей функцией, как и у системы гармонических колебаний

$$\frac{dx}{dt} = by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx, \tag{6}$$

где b и c постоянны, $bc = -k^2 \neq 0$.

Отражающая функция системы (6) задается формулами

$$F_1 = x\cos 2kt - \frac{b}{k} y \sin 2kt,$$
$$F_1 = y\cos 2kt + \frac{k}{b} x \sin 2kt.$$

Теорема 1[6] [5]. *Пусть в точках, где* $\sin 2kt = 0$ *функция*

$$Z(t,x,y) := \frac{\cos 2kt \cdot X(t,x,y) + X(-t, F_1(t,x,y), F_2(t,x,y))}{k^{-1} b \cdot \sin 2kt}$$

доопределяется до непрерывной функции. Тогда отражающая функция системы (5) в своей области определения совпадает с отражающей функцией системы гармонического осциллятора (6) если и только если $Y(t,x,y) = Z(t,x,y)$.

Эта теорема показывает, насколько велико множество систем, эквивалентных системе гармонических колебаний.

Далее рассматриваются неавтономные квадратичные системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(t)x + b(t)y + a_{20}(t)x^2 + a_{11}(t)xy + a_{02}(t)y^2, \\ \dot{y} &= c(t)x + d(t)y + b_{20}(t)x^2 + b_{11}(t)xy + b_{02}(t)y^2. \end{aligned} \tag{7}$$

---

[6] Нумерация теорем в автореферате не связана с их нумерацией в диссертации.

Для них формулируется и доказывается

Лемма 1 [1]. *Пусть функции* $a_{ij}(t)$ *и* $b_{ij}(t)$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{array}{ll} \dot a_{20}+a_{20}a+a_{11}c-b_{20}b=0, & \dot b_{20}+b_{20}(2a-d)+b_{11}c-a_{20}c=0, \\ \dot a_{11}+2a_{20}b+a_{11}d+2a_{02}c-b_{11}b=0, & \dot b_{11}+2b_{20}b+b_{11}a+2b_{02}c-a_{11}c=0, \\ \dot a_{02}+a_{02}(2d-a)+a_{11}b-b_{02}b=0, & \dot b_{02}+b_{02}d+b_{11}b-a_{02}c=0. \end{array} \tag{8}$$

Тогда дифференциальная система $\dot x = Ax+\alpha(t)\Delta$, *где* $\alpha(t)$ *- нечетная непрерывная скалярная функция,* $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, $\Delta=\begin{pmatrix} a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2 \\ b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2\end{pmatrix}$, *имеет ту же отражающую функцию, что и линейная неавтономная система* $\dot x = Ax$.

В качестве одного из примеров использования леммы 1 доказывается

Теорема 2 [11]. *Пусть выполнены условия (8) и* $d(t)=a(t);\ c(t)=-b(t)$. *Тогда отражающая функция системы (7) имеет вид*

$$\begin{aligned} F_1 &= e^{-2\int_0^t a_{ч}(\tau)d\tau}\left(x\cos 2\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau - y\sin 2\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau\right), \\ F_2 &= e^{-2\int_0^t a_{ч}(\tau)d\tau}\left(x\sin 2\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau + y\cos 2\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь и далее $a_{ч}(t):=\dfrac{a(t)+a(-t)}{2}$, $a_{H}(t):=\dfrac{a(t)-a(-t)}{2}$, $\bar a := a(-t)$.

Используя эту теорему, доказывается

Теорема 3 [11]. *Пусть функции* $a_{ij}(t)$ *и* $b_{ij}(t)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$a_{20}\cos 2\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau - b_{20}\sin 2\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau +$$
$$+\bar a_{20}\cos^2 2\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau + \bar a_{11}\tfrac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau + \bar a_{02}\sin^2 2\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau = 0,$$

$$a_{11}\cos 2\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau - b_{11}\sin 2\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau -$$
$$-\bar a_{20}\sin 4\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau + \bar a_{11}\cos 4\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau + \bar a_{02}\sin 4\int_0^t b_{ч}(\tau)d\tau = 0,$$

$$a_{02}\cos 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau - b_{02}\sin 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau +$$

$$+\bar{a}_{20}\sin^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau - \bar{a}_{11}\tfrac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau + \bar{a}_{02}\cos^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau = 0$$

$$a_{20}\sin 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau + b_{20}\cos 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau +$$

$$+\bar{b}_{20}\cos^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau + \bar{b}_{11}\tfrac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau + \bar{b}_{02}\sin^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau = 0,$$

$$a_{11}\sin 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau + b_{11}\cos 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau -$$

$$-\bar{b}_{20}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau + \bar{b}_{11}\cos 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau + \bar{b}_{02}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau = 0, \qquad (10)$$

$$a_{02}\sin 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau + b_{02}\cos 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau +$$

$$+\bar{b}_{20}\sin^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau - \bar{b}_{11}\tfrac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_ч(\tau)d\tau + \bar{b}_{02}\cos^2 2\int_0^t b_ч(\tau)d\tau = 0$$

Тогда отражающая функция системы (7) при $d(t) = a(t), c(t) = -b(t)$ *имеет вид (9).*

Эта теорема позволяет строить конкретные системы вида (7), которые имеют такую же отражающую функцию как и укороченная линейная система.

Две системы, имеющие одну и ту же отражающую функцию, в дальнейшем будем называть эквивалентными.

Далее в этой главе строятся периодические системы вида (7), которые эквивалентны в смысле совпадения отражающих функций системе гармонических колебаний (6). С этой целью доказывается

Лемма 2 [1]. *Все периодические решения системы (8) при* $a = d = 0$ *и* $bc = -k^2, (b, c - const \neq 0)$ *записываются в виде:*

$$\begin{aligned}
a_{20} &= C_1\cos kt + C_2\sin kt + C_3\cos 3kt + C_4\sin 3kt,\\
a_{11} &= \frac{1}{c}(bC_5 + kC_1)\sin kt + \frac{1}{c}(bC_6 - kC_2)\cos kt + \frac{2k}{c}C_3\sin 3kt - \frac{2k}{c}C_4\cos 3kt,\\
a_{02} &= -\frac{bk}{c^2}C_5\cos kt + \frac{bk}{c^2}C_6\sin kt + \frac{b}{c}C_3\cos 3kt + \frac{b}{c}C_4\sin 3kt,\\
b_{20} &= C_5\sin kt + C_6\cos kt + \frac{c}{k}C_3\sin 3kt - \frac{c}{k}C_4\cos 3kt,\\
b_{11} &= (C_1 - \frac{k}{c}C_5)\cos kt + (C_2 + \frac{k}{c}C_6)\sin kt - 2C_3\cos 3kt - 2C_4\sin 3kt, \qquad (11)\\
b_{02} &= \frac{k}{c}C_1\sin kt - \frac{k}{c}C_2\cos kt - \frac{k}{c}C_3\sin 3kt + \frac{k}{c}C_4\cos 3kt,
\end{aligned}$$

где $C_i, i=\overline{1;6}$ – произвольные постоянные.

Эта лемма позволяет среди всех систем вида (7), эквивалентных системе (6), выбрать периодические по времени системы.

Доказываются теоремы 4 и 5.

Теорема 4 [1]. *Все системы вида*

$$\dot{x} = by + \alpha_1(x^2\cos kt + xy\frac{k}{c}\sin kt) + \alpha_2(x^2\sin kt - xy\frac{k}{c}\cos kt) +$$
$$+\alpha_3(x^2\cos 3kt + xy\frac{2k}{c}\sin 3kt + y^2\frac{b}{c}\cos 3kt) + \alpha_4(x^2\sin 3kt - xy\frac{2k}{c}\cos 3kt + y^2\frac{b}{c}\sin 3kt) +$$
$$+\alpha_5(xy\frac{b}{c}\sin kt - y^2\frac{bk}{c^2}\cos kt) + \alpha_6(xy\frac{b}{c}\cos kt + y^2\frac{bk}{c^2}\sin kt),$$

$$\dot{y} = cx + \alpha_1(xy\cos kt + y^2\frac{k}{c}\sin kt) + \alpha_2(xy\sin kt - y^2\frac{k}{c}\cos kt) +$$
$$+\alpha_3(x^2\frac{c}{k}\sin 3kt - 2xy\cos 3kt - y^2\frac{k}{c}\sin 3kt) + \alpha_4(-x^2\frac{c}{k}\cos 3kt - 2xy\sin 3kt + y^2\frac{k}{c}\cos 3kt) +$$
$$+\alpha_5(x^2\sin kt - xy\frac{k}{c}\cos kt) + \alpha_6(x^2\cos kt + xy\frac{k}{c}\sin kt);$$

где $\alpha_i(t),\ i=\overline{1,6}$ – нечётные непрерывные функции, имеют одну и ту же отражающую функцию, совпадающую с отражающей функцией линейной системы (6).

Теорема 5 [2, 5]. *Для того чтобы система (7) при $a=d=0$, $bc=-k^2, (b,c-const\neq 0)$ имела такую же отражающую функцию что и система (6) достаточно выполнение условий:*

$$\begin{aligned}
b_{20} &= \frac{c}{k}(\sin 2kt - ctgkt)a_{20Ч} - \frac{c}{k}(\sin 2kt - tgkt)a_{20Н} \\
&\quad + \frac{c^2}{k^2}\cos 2kt(a_{11Ч} - a_{11Н}) + \frac{c^3}{k^3}\sin 2kt(a_{02Н} - a_{02Ч}), \\
b_{11} &= 2\cos 2kt(a_{20Н} - a_{20Ч}) + \frac{c}{k}(2\sin 2kt - ctgkt)a_{11Ч} \\
&\quad - \frac{c}{k}(2\sin 2kt - tgkt)a_{11Н} + \frac{2c^2}{k^2}\cos 2kt(a_{02Ч} - a_{02Н}), \\
b_{02} &= \frac{k}{c}\sin 2kt(a_{20Н} - a_{20Ч}) + \cos 2kt(a_{11Н} - a_{11Ч}) \\
&\quad + \frac{c}{k}(\sin 2kt - ctgkt)a_{02Ч} - \frac{c}{k}(\sin 2kt - tgkt)a_{02Н}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Эта теорема позволяет по первому уравнению системы, эквивалентной системе (6), построить её второе уравнение.

Доказанные теоремы устанавливают условия совпадения временных симметрий рассматриваемых квадратичных и линейных систем. Используя эти теоремы, общую теорию отражающей функции и, в частности, связь отражающей функции с отображением за период, легко устанавливаются факты наличия или отсутствия решений краевых двухточечных задач для выделенных систем или их периодических решений, если выделенные системы периодичны. В качестве примера приведем здесь следующую теорему.

Теорема 6 [5]. *Пусть для системы (7) с непрерывными коэффициентами* a_{ij}, b_{ij}*, где* b *и* c *постоянны,* $bc = -k^2 \neq 0,\ \ a = d = 0,$ *выполнены условия (12). Тогда продолжимое на* $[-\omega;\omega]$ *решение* $(x(t), y(t))$ *этой системы будет удовлетворять краевому условию* $\Phi(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)) = 0$ *тогда и только тогда, когда начальная точка* $(x(\omega), y(\omega))$ *этого решения удовлетворяет условию*

$$\Phi\left(x(\omega), y(\omega), x(\omega)\cos 2k\omega - \frac{b}{k} y(\omega)\sin 2k\omega, \frac{k}{b} x(\omega)\sin 2k\omega + y(\omega)\cos 2k\omega \right) = 0 .$$

Следующая теорема является простым применением теорем 2, 3 и 7.

Теорема 7. *Пусть для системы (7) при* $d(t) = a(t), c(t) = -b(t)$ *с непрерывными коэффициентами выполнены условия (10). Тогда для краевой задачи*

$$\begin{aligned} &a_1 x(\omega) + a_2 y(\omega) + a_3 x(-\omega) + a_4 y(-\omega) = c_1, \\ &b_1 x(\omega) + b_2 y(\omega) + b_3 x(-\omega) + b_4 y(-\omega) = c_2, \end{aligned} \qquad (13)$$

для системы (7) верны следующие положения:

1) если число

$$\begin{aligned} D := {} & (a_1 b_2 + a_3 b_4 - a_2 b_1 - a_4 b_3) + \\ & + (a_3 b_1 + a_4 b_3 - a_1 b_3 - a_2 b_4) e^{-2\int_0^\omega a_{ч}(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_{ч}(\tau)d\tau + \\ & + (a_1 b_4 + a_3 b_2 - a_2 b_3 - a_4 b_1) e^{-2\int_0^\omega a_{ч}(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_{ч}(\tau)d\tau \neq 0, \end{aligned}$$

то краевая задача (13) имеет единственное решение, начинающееся при $t = \omega$ *в точке* $(x(\omega), y(\omega))$*, удовлетворяющей системе алгебраических уравнений*

$$M \cdot x(\omega) + N \cdot y(\omega) = c_1, P \cdot x(\omega) + Q \cdot y(\omega) = c_2,$$

где числа

$$M := a_1 + a_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_Ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_Ч(\tau)d\tau + a_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_Ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_Ч(\tau)d\tau,$$

$$N := a_2 - a_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_Ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_Ч(\tau)d\tau + a_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_Ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_Ч(\tau)d\tau,,$$

$$P := b_1 + b_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_Ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_Ч(\tau)d\tau + b_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_Ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_Ч(\tau)d\tau,$$

$$Q := b_2 - b_3 e^{-2\int_0^{\omega} a_Ч(\tau)d\tau} \sin 2\int_0^{\omega} b_Ч(\tau)d\tau + b_4 e^{-2\int_0^{\omega} a_Ч(\tau)d\tau} \cos 2\int_0^{\omega} b_Ч(\tau)d\tau,$$

если только это решение продолжимо на $[-\omega,\omega]$ *(если же это решение не продолжимо на* $[-\omega,\omega]$*, то задача (13) для системы (7) решений не имеет).*
2) если число $D=0$ *и* $\frac{P}{M}=\frac{Q}{N}\neq\frac{c_2}{c_1}$*, то краевая задача (13) не имеет решений.*

3) если число $D=0$ *и* $\frac{P}{M}=\frac{Q}{N}=\frac{c_2}{c_1}$*, то краевая задача (13) имеет бесконечно много решений, причем при* $t=\omega$ *множество начальных данных* $(x(\omega), y(\omega))$ *этих решений находится на прямой* $M\cdot x(\omega)+N\cdot y(\omega)=c_1$.
4) если $M=N=P=Q=c_1=c_2=0$*, то краевая задача (13) имеет своими решениями все решения системы (7), продолжимые на* $[-\omega,\omega]$.

Также рассматривается система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)y+a_3(t)x^2+a_4(t)xy+a_5(t)y^2, \\ \dot{y} &= b_0(t)+b_1(t)x+b_2(t)y+b_3(t)x^2+b_4(t)xy+b_5(t)y^2 \end{aligned} \qquad (14)$$

с непрерывными на $\boldsymbol{R}$ коэффициентами $a_i=a_i(t)$ и $b_i=b_i(t)$, $i=\overline{0,5}$.

Для нее доказывается

Теорема 8 [6]. *Пусть для функции*

$$a := \frac{4a_5b_5 - a_4b_4}{a_4^2+2a_5b_4-2a_4b_5-4a_3a_5}$$

функции $\alpha_0 := aa_0+b_0, \alpha_1 := aa_2+b_2, \alpha_2 := aa_5+b_5$ *- нечетны и удовлетворяют условиям*

$$\alpha_1 a = \dot{a} + aa_1 + b_1, \alpha_2 a^2 = aa_3 + b_3, 2\alpha_2 a = aa_4 + b_4, \qquad (15)$$

Тогда для всякого решения $(x(t), y(t))$ *системы (14), продолжимого на симметричный отрезок* $[-\omega;\omega]$, *для всех* $t \in [-\omega;\omega]$ *справедливо тождество* $a(t)x(t) + y(t) \equiv a(-t)x(-t) + y(-t)$.

Теорема 9 [6]. *Пусть для системы (14) с дифференцируемыми на **R** и* 2ω*-периодическими коэффициентами выполнены условия (15), а также*

$$\alpha_{0ч}(t) \equiv \alpha_{2ч}(t); \qquad \alpha_1(t)\cos 2\int_0^t \alpha_{0ч}(\tau)d\tau \equiv (\alpha_0(t) - \alpha_2(t))\sin 2\int_0^t \alpha_{0ч}(\tau)d\tau.$$

Тогда если $2\int_0^\omega \alpha_{0ч}(\tau)d\tau = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$, *то для любого продолжимого на* $[-\omega;\omega]$ *решения* $(x(t), y(t))$ *системы (14) функция* $U := a(t)x(t) + y(t)$ *является* 2ω*-периодической. Если же* $2\int_0^\omega \alpha_{0ч}(\tau)d\tau \neq k\pi$, *то эта функция U(t) непериодична, а система (14) не имеет* 2ω*- периодических решений.*

Глава 3 посвящена исследованию неавтономных дифференциальных систем с кубической относительно координат фазового вектора правой частью. Эти исследования проводятся с помощью тех же методов, что и в главе 2.

Вначале формулируется и доказывается

Лемма 3. *Пусть функции* $a_{ij}(t)$ *и* $b_{ij}(t)$ *удовлетворяют системе уравнений (8), а также системе*

$$\begin{aligned}
&\dot{a}_{30} + 2a_{30}a + a_{21}c - b_{30}b = 0, && \dot{b}_{30} + b_{30}(3a - d) + b_{21}c - a_{30}c = 0,\\
&\dot{a}_{21} + 3a_{30}b + a_{21}(a + d) + 2a_{12}c - b_{21}b = 0, && \dot{b}_{21} + 3b_{30}b + 2b_{21}a + 2b_{12}c - a_{21}c = 0,\\
&\dot{a}_{12} + 2a_{21}b + 2a_{12}d + 3a_{03}c - b_{12}b = 0, && \dot{b}_{12} + 2b_{21}b + b_{12}(a + d) + 3b_{03}c - a_{12}c = 0,\\
&\dot{a}_{03} + a_{12}b + a_{03}(3d - a) - b_{03}b = 0, && \dot{b}_{03} + b_{12}b + 2b_{03}d - a_{03}c = 0.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Тогда дифференциальная система $\dot{x} = Ax + \alpha\Delta$, *где* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \end{pmatrix}$, $\alpha(t)$ *- нечетные скалярные функции, имеет ту же отражающую функцию, что и система* $\dot{x} = Ax$.

Даются примеры использования этой леммы.

В дальнейшем в этой главе рассматриваются периодические системы вида

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= by + a_{20}(t)x^2 + a_{11}(t)xy + a_{02}(t)y^2 + a_{30}(t)x^3 + a_{21}(t)x^2y + a_{12}(t)xy^2 + a_{03}(t)y^3,\\
\dot{y} &= cx + b_{20}(t)x^2 + b_{11}(t)xy + b_{02}(t)y^2 + b_{30}(t)x^3 + b_{21}(t)x^2y + b_{12}(t)xy^2 + b_{03}(t)y^3,
\end{aligned} \qquad (17)$$

которые эквивалентны в смысле совпадения отражающих функций системе (6).

С этой целью доказывается

Лемма 4. *Все периодические решения системы (16), где b и с постоянны*, $bc=-k^2\neq 0,\ a=d=0$ *записываются в виде*

$$
\begin{aligned}
a_{20} &= C_1\cos kt + C_2\sin kt + C_3\cos 3kt + C_4\sin 3kt,\\
a_{11} &= \frac{1}{c}(bC_5+kC_1)\sin kt + \frac{1}{c}(bC_6-kC_2)\cos kt + \frac{2k}{c}C_3\sin 3kt - \frac{2k}{c}C_4\cos 3kt,\\
a_{02} &= -\frac{bk}{c^2}C_5\cos kt + \frac{bk}{c^2}C_6\sin kt + \frac{b}{c}C_3\cos 3kt + \frac{b}{c}C_4\sin 3kt,\\
b_{20} &= C_5\sin kt + C_6\cos kt + \frac{c}{k}C_3\sin 3kt - \frac{c}{k}C_4\cos 3kt,\\
b_{11} &= (C_1-\frac{k}{c}C_5)\cos kt + (C_2+\frac{k}{c}C_6)\sin kt - 2C_3\cos 3kt - 2C_4\sin 3kt,\\
b_{02} &= \frac{k}{c}C_1\sin kt - \frac{k}{c}C_2\cos kt - \frac{k}{c}C_3\sin 3kt + \frac{k}{c}C_4\cos 3kt,\\
a_{30} &= C_7\cos 2kt + C_8\sin 2kt + C_9\cos 4kt + C_{10}\sin 4kt,\\
a_{21} &= \frac{k}{2c}(C_{11}+3C_7)\sin 2kt - \frac{k}{2c}(C_{12}+3C_8)\cos 2kt + \frac{3k}{c}C_9\sin 4kt - \frac{3k}{c}C_{10}\cos 4kt,\\
a_{12} &= \frac{b}{c}C_{11}\cos 2kt + \frac{b}{c}C_{12}\sin 2kt + \frac{3b}{c}C_9\cos 4kt + \frac{3b}{c}C_{10}\sin 4kt,\\
a_{03} &= -\frac{kb}{2c^2}(C_7-C_{11})\sin 2kt + \frac{kb}{2c^2}(C_8-C_{12})\cos 2kt + \frac{kb}{c^2}C_9\sin 4kt - \frac{kb}{c^2}C_{10}\cos 4kt\\
b_{30} &= \frac{c}{2k}(C_7-C_{11})\sin 2kt - \frac{c}{2k}(C_8-C_{12})\cos 2kt + \frac{c}{k}C_9\sin 4kt - \frac{c}{k}C_{10}\cos 4kt,\\
b_{21} &= C_{11}\cos 2kt + C_{12}\sin 2kt - 3C_9\cos 4kt - 3C_{10}\sin 4kt,\\
b_{12} &= \frac{k}{2c}(3C_7+C_{11})\sin 2kt - \frac{k}{2c}(3C_8+C_{12})\cos 2kt - \frac{3k}{c}C_9\sin 4kt + \frac{3k}{c}C_{10}\cos 4kt,\\
b_{03} &= \frac{b}{c}C_7\cos 2kt + \frac{b}{c}C_8\sin 2kt - \frac{b}{c}C_9\cos 4kt - \frac{b}{c}C_{10}\sin 4kt,
\end{aligned}
$$

где $C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7,C_8,C_9,C_{10},C_{11},C_{12}$ *- произвольные постоянные.*

Эта лемма позволяет среди всех систем вида (17), эквивалентных системе (6), выбрать периодические по времени системы.

Далее для системы с кубической по фазовым переменным правой частью доказывается теорема [10], аналогичная теореме 4.

Теорема 10 [2, 7]. *Для того чтобы периодическая система (17) с* $a=d=0$, $bc=-k^2,(b,c-const\neq 0)$ *имела такую же отражающую функцию, что и система (6), достаточно выполнение условий (12) и следующих условий:*

$$a_{03} = \frac{c^3}{k^3} tg2kt \cdot a_{30Н} - \frac{c^3}{k^3} ctg2kt \cdot a_{30Ч} + \frac{b}{3c} a_{21} + \frac{k}{3c} tg2kt \cdot a_{12Н} - \frac{k}{3c} ctg2kt \cdot a_{12Ч},$$

$$b_{30} = \frac{c}{k} \cos 4kt \cdot tg2kt \cdot a_{30Н} - \frac{2c}{k} \cos^2 2kt \cdot ctg2kt \cdot a_{30Ч} + \frac{4c}{3b} \cos^2 2kt \cdot a_{21Н} -$$

$$- \frac{c}{3b}(1 + 2\cos 4kt) a_{21Ч} + \frac{c^3}{3k^3}(2 + \cos 4kt) tg2kt \cdot a_{12Н} + \frac{c^3}{6k^3} \sin 4kt \cdot a_{12Ч},$$

$$b_{21} = 3\cos 4kt \cdot a_{30Н} - 6\cos^2 2kt \cdot a_{30Ч} - \frac{2c}{k} \sin 4kt \cdot a_{21Н} - \frac{2c}{k} \cos 4kt \cdot ctg2kt \cdot a_{21Ч} +$$

$$+ \frac{2c}{b} \cos^2 2kt \cdot a_{12Н} + \frac{c}{b} \sin 4kt \cdot a_{12Ч},$$

$$b_{12} = \frac{3k}{c} \sin 4kt \cdot a_{30Н} + \frac{3k}{c} \cos 4kt \cdot ctg2kt \cdot a_{30Ч} + (1 + 2\cos 4kt) a_{21Н} + (1 - \tfrac{3}{2}\cos^2 2kt) a_{21Ч} +$$

$$+ \frac{k}{b} \sin 4kt \cdot a_{12Н} + \frac{k}{2b} \cos 4kt \cdot ctg2kt \cdot a_{12Ч},$$

$$b_{03} = \frac{2b}{c} \cos^2 2kt \cdot a_{30Н} - \frac{b}{c} \cos 4kt \cdot a_{30Ч} - \frac{2b}{3k} \sin 4kt \cdot a_{21Н} - \frac{2b}{3k} \cos 4kt \cdot ctg2kt \cdot a_{21Ч} +$$

$$+ \frac{1}{3} \cos 4kt \cdot a_{12Н} - \frac{2}{3} \cos^2 2kt \cdot a_{12Ч}.$$

Доказанные теоремы устанавливают совпадение временных симметрий рассматриваемых кубических и линейных систем. Эти результаты используются затем для исследования вопросов существования периодических решений и решений двухточечных краевых задач для кубических дифференциальных систем. Соответствующие результаты содержатся в работах [2, 7]. Ввиду полной аналогии этих результатов теоремам 6, 7, 8, 11 мы их здесь не приводим.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Построено множество двумерных неавтономных полиномиальных степени не выше трёх систем, отражающая функция которых совпадает с отражающей функцией соответствующей линейной системы [1, 5].

2. Построено множество периодических по времени двумерных полиномиальных по координатам фазового вектора степени не выше трёх систем, отражающая функция которых и отображение Пуанкаре которых совпадает с соответствующими отражающей функцией и отображением Пуанкаре системы гармонических колебаний [1, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13].

3. Указаны уравнения для нахождения начальных данных решений двухточечной краевой задачи, для построенных двумерных полиномиальных, степени не выше трёх, систем [2, 3, 5, 6, 7, 10, 11].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теории колебаний, при чтении спецкурсов и проведении спецсеминаров по теории дифференциальных уравнений и теории колебаний.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных изданиях, соответствующих п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Вареникова, Е.В. Квадратичные системы с одинаковыми отражающими функциями / Е.В. Вареникова // Веснік Мазырскага дзяржаунага педагагічнага універсітэта. – 2007. – № 1(16). – С. 3–6.

2. Вареникова, Е.В. О решениях двухточечной краевой задачи для одной неавтономной дифференциальной системы с кубической по фазовым переменным правой частью / Е.В. Вареникова // Вестник Брянского государственного университета. – 2008. – № 4. – С. 27–31.

3. Вареникова, Е.В. О периодических решениях неавтономных двумерных дифференциальных квадратичных систем / Е.В. Вареникова // Вестник Брянского государственного университета. – 2010. – № 4. – С. 18–20.

4. Вареникова, Е.В. О периодических решениях неавтономных двумерных дифференциальных квадратичных систем / Е.В. Вареникова// Веснік Гродзенскага дзяржаунага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. – 2011. – № 1. – С. 20–23.

5. Вареникова, Е.В. Отражающая функция и решения двухточечных краевых задач для неавтономных двумерных дифференциальных систем / Е.В. Вареникова// Дифференц. уравнения. – 2012. – Т.48, № 1 – с. 143–147.

Статьи в других научных журналах

6. Вареникова, Е.В. Временные симметрии двумерных неавтономных дифференциальных систем / Е.В. Вареникова// Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 – С. 22–24.

Материалы научных конференций

7. Вареникова, Е.В. О решениях двухточечной краевой задачи для неавтономной дифференциальной системы с кубической по фазовой переменной правой частью / Е.В. Вареникова // Актуальные проблемы науки и образования: труды и материалы XI междунар. научн.-метод. конф. Новозыбков, 22-23 окт. 2008 г.: в 2 т. – Брянск: РИО БГУ, 2008. – Т.2. – С. 8–12.

8. Вареникова, Е.В. Отражающая функция одной неавтономной дифференциальной квадратичной системы / Е.В. Вареникова// Российско-

белорусско-украинское пограничье: аспекты взаимодействия в контексте единого социокультурного пространства – история и перспективы : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Новозыбков, 21–22 окт. 2010 г. – Брянск: РИО БГУ, 2010 – С. 54–56.

9. Вареникова, Е.В. О периодических решениях одной неавтономной дифференциальной системы / Е.В. Вареникова // Российско-белорусско-украинское пограничье: 25-летие экологических и социально-педагогических проблем в постчернобыльский период : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Новозыбков, 26–27 апр. 2011 г. – Брянск: РИО БГУ, 2011 – С. 451–454.

Тезисы докладов

10. Вареникова, Е.В. Кубические неавтономные системы, эквивалентные в смысле совпадения отражающих функций линейным автономным / Е.В. Вареникова// ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2007 : тез. докл. XII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Пинск, 16 – 19 мая 2007 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т ; редкол.: В.В. Амелькин [и др.] – Минск, 2007 – С. 12–13.

11. Вареникова, Е.В. Об отражающей функции одной двумерной неавтономной системы и ее периодических решениях / Е.В.Вареникова // ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2009 : тез. докл. XIII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Пинск, 26 – 29 мая 2009 / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т; редкол. : В.В. Амелькин [и др.] – Минск, 2009. – С. 28–30.

12. Вареникова, Е.В. О периодических решениях неавтономных двумерных дифференциальных кубических систем / Е.В. Вареникова // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тез. докл. междунар. матем. конф., Минск, 7 – 10 дек. 2010 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2010. – С. 27.

13. Вареникова, Е.В. О периодических решениях одной неавтономной двумерной кубической системы дифференциальных уравнений / Е.В. Вареникова // ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2011 : тез. докл. XIV междунар. научн. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 12 – 14 мая 2011 / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т; редкол.: В.В. Амелькин [и др.] – Минск, 2011. – С. 42–43.

РЭЗЮМЭ

Варэнікава Алена Уладзіміраўна
Дыферэнцыяльныя сістэмы, эквівалентныя ў сэнсе супадзення адлюстроўваючых функцый

Ключавыя словы: дыферэнцыяльнае раўнанне, рашэнне, перыяд, устойлівасць, адлюстраванне Пуанкарэ, адлюстроўваючая функцыя.

Аб`ект даследвання – неаўтаномныя дыферэнцыяльныя сістэмы з палінаміяльнай адносна каардынат фазавага вектара правай часткай. Прадмет даследвання – перыядычныя рашэнні азначаных сістэм і іх устойлівасць.

Мэтай дысертацыйнага даследвання з`яўляецца знаходжанне пачатковых даных рашэнняў двухпунктовых краявых задач неаўтаномных двухмерных дыферэнцыяльных сістэм з квадратычнымі адносна каардынат фазавага вектара правымі часткамі.

Метады даследвання. Выкарыстоўваліся метады класічнай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, а таксама метад адлюстроўваючай функцыі.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыі атрыманы наступныя новыя, як па зместу, так і па форме, вынікі:

- пабудавана мноства неаўтаномных двухмерных палінаміяльных, ступені не вышэй за трох, дыферэнцыяльных сістэм, адлюстроўваючая функцыя якіх супадае з адлюстроўваючай функцыяй адпаведнай лінейнай сістэмы;
- пабудавана мноства перыядычных двухмерных палінаміяльных, ступені не вышэй за трох, дыферэнцыяльных сістэм, адлюстроўваючая функцыя якіх супадае з адлюстроўваючай функцыяй сістэмы гарманічных хістанняў;
- выпісаны ураўненні для знаходжання пачатковых даных рашэнняў двухпунктовых краявых задач для пабудаваных двухмерных палінаміяльных, ступені не вышэй за трох, дыферэнцыяльных сістэм, адлюстроўваючая функцыя якіх супадае з адлюстроўваючай функцыяй сістэмы гарманічных хістанняў.

Рэкамендацыі па выкарыстанні і сфера ўжывання. Вынікі дысертацыі носяць тэарэычны характар. Яны могуць быть выкарыстаны ў тэорыі хістанняў, на лекцыях і практычных занятках па спецыяльных курсах па тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў і тэорыі хістанняў. Пералічаныя вынікі могуць быць выкарыстаны пры вырашэнні шырокага круга задач прыродазнаўства, тэхнікі, эканомікі, сацыялогіі, звязаных з аналізам перыядычных краявых задач для двухмерных сістэм звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў.

РЕЗЮМЕ

Вареникова Елена Владимировна
Дифференциальные системы, эквивалентные в смысле совпадения отражающих функций

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, решение, период, устойчивость, отображение Пуанкаре, отражающая функция, краевая задача.

Объект исследования: неавтономные дифференциальные системы с полиномиальной относительно координат фазового вектора правой частью. Предмет исследования – периодичные решения систем и их устойчивость.

Цель исследования: нахождение начальных данных периодических решений неавтономных дифференциальных двумерных систем с квадратичными и кубическими относительно координат фазового вектора правыми частями.

Методы исследования. Использовались классические методы качественной теории дифференциальных уравнений, а также метод отражающей функции.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации найдены следующие новые как по форме, так и по содержанию, результаты:

- построены двумерные неавтономные полиномиальные степени не выше трёх дифференциальные системы, отражающая функция которых совпадает с отражающей функцией соответствующей линейной системы;
- построено множество периодических двумерных полиномиальных степени не выше трёх систем, отражающая функция которых и отображение Пуанкаре которых совпадает соответственно с отражающей функцией и отображением Пуанкаре системы гармонических колебаний;
- указаны уравнения для нахождения начальных данных решений двухточечных краевых задач для построенных двумерных полиномиальных, степени не выше трёх, систем, отражающая функция которых совпадает с отражающей функцией системы гармонических колебаний.

Рекомендации по использованию и область применения. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теории колебаний, на лекциях и практических занятиях по специальным курсам по теории дифференциальных уравнений и теории колебаний. Перечисленные результаты могут быть использованы при решении широкого круга задач естествознания, техники, экономики, социологии, связанных с анализом периодических краевых задач для двумерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

SUMMARY

Elena V. Varenikova
Differential Systems Equivalent in Sense of Coincidence Reflecting Functions

Keywords: differential equation, solution, period, stability, Poincare` mapping, reflecting function.

The object of research is nonautonomous differential systems with the polynomial with respect to the coordinate of the phase - vector right - hand – side. Main task is the investigation of existence and stability of periodic solutions of the above determinate systems.

The aim of the dissertation research is the determination of the initial dates of periodic solutions nonautonomous two-dimensional differential systems with the quadratic with respect to the coordinate of the phase- vector right-hand-side.

Research methods: the methods of classic theory of differential equations, and the method of reflecting function also.

The results obtained and their novelty. The new in the form and information results of the dissertation are:

- The set of nonautonomous two-dimensional quadratic with respect to the coordinate of the phase-vector differential corresponding linear systems.
- The set of periodic two-dimensional quadratic with respect to the coordinate of the phase-vector differential systems were constructed.
- The equations for obtaining initial dates of solutions of two-point boundary problems for two-dimensional quadratic with respect to the coordinate of the phase-vector differential systems were given.

Recommendations for the use and sphere of use. The results of the dissertation have theoretic character. It can be used in the oscillation theory and on lectures and seminars of the special courses in the theory of differential equations and in the oscillation theory. The above results can be used in solving a wide range of problems of natural science, technology, economics, sociology, and related to the analysis of periodic boundary value problems for two - dimensional systems of ordinary differential equations.