Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.94

ВАСИЛЕВИЧ
Михаил Николаевич

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА ТИПА ФУКСА С ЗАДАННОЙ ГРУППОЙ МОНОДРОМИИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

Гродно, 2014

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель	**Амелькин Владимир Васильевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета
Официальные оппоненты:	**Цегельник Владимир Владимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»;
	Тыщенко Валентин Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»
Оппонирующая организация:	Учреждение образования «**Могилёвский государственный университет имени А.А. Кулешова**»

Защита состоится 19.12.2014 в 10.00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209

Телефон ученого секретаря: (+375 152) 74 43 76; (+375 152) 73 1926.

Email: v.a.pronko@gmail.com; n.nech@grsu.by

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Автореферат разослан 18.11.2014

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций К 02.14.02 В.А. Пронько

ВВЕДЕНИЕ

В 1900 г. на II Международном конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт сформулировал 23 математические проблемы, которые, с его точки зрения, являлись наиболее значимыми для математики начинающегося XX столетия. Одна из них – 21-я проблема была поставлена следующим образом: *показать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии.*

В последующем пояснении к этой формулировке Д. Гильберт говорит уже не об условии фуксовости уравнения, а об условии регулярности, что, вообще говоря, приводит к неопределенности в выборе класса дифференциальных уравнений, в рамках которого следует решать задачу, истоками которой являются работы Б. Римана, опубликованные в 1857 г.[1]

Б. Риман утверждал, что задание группы монодромии, согласованной с заранее данным поведением решений в особых точках, достаточно для полного восстановления уравнения.

Обозначенная проблема была решена самим Б. Риманом для случая гипергеометрического уравнения, причем была явно указана фундаментальная система решений, обладающая нужными свойствами.

И. Племель был, по-видимому, первым, кто обратил внимание на некоторую неопределенность в формулировке 21-й проблемы Д. Гильберта, называемой в настоящее время проблемой Римана – Гильберта, решив ее в случае регулярных линейных дифференциальных систем, и решая в классе фуксовых систем.

Напомним, что скалярное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с мероморфными коэффициентами

$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)y = 0, \quad x \in \mathbf{C}, \quad y \in \mathbf{C},$$

называется фуксовым в особой точке a_j, если порядок полюса коэффициента $q_j(x)$ этого уравнения в точке a_j не превосходит числа j (для некоторых $q_j(x)$ точка a_j вообще может не быть особой точкой).

Далее, линейная дифференциальная система с особыми точками a_i, $i = \overline{1, m}$, называется фуксовой, если она имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{x - a_i} \right) y,$$

где A_i – постоянные $(p \times p)$-матрицы.

---

[1] Риман, Б. Сочинения / Б. Риман ; пер. с нем. под ред., с предис. и примеч. В.Л. Гончарова. – М.–Л. : ОГИЗ. Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1948. – 543 с.

Заметим, что все особые точки фуксовой системы являются регулярными. Регулярность особых точек означает, что любое решение фуксовой системы при приближении к особой точке a_j, по любой секториальной окрестности с вершиной в точке a_j, не совпадающей с **C**, имеет самое большее полиномиальный рост.

Класс линейных дифференциальных систем с регулярными особыми точками содержит в себе класс фуксовых систем, но не исчерпывается им.

В отличие от линейных систем для линейных уравнений указанного выше вида понятия фуксовости и регулярности эквивалентны[2].

Отметим также следующее. Касаясь истории вопроса, связанного с формулировкой 21-й проблемы Д. Гильберта, Н.П. Еругин[3] отметил, что первым, кто явно указал на класс фуксовых систем, как на простейший класс линейных дифференциальных уравнений, в рамках которого следует решать проблему, был И.А. Лаппо-Данилевский.

Имея в виду некоторую, отмеченную выше, неопределенность в формулировке 21-й проблемы Д. Гильберта, Ю.С. Ильяшенко предложил в начале 1980-х годов следующую обобщенную формулировку проблемы: *требуется доказать существование на сфере Римана*

(A) *фуксова линейного дифференциального уравнения n-го порядка*,

(B) *линейной системы с регулярными особенностями*,

(C) *фуксовой системы*,

имеющих любой наперед заданный набор особых точек и заданную группу монодромии.

Из этой обобщенной формулировки следует, что И. Племель[4], а затем Х. Рёрль[5] дали положительное решение проблемы в версии (B), а значит, и в версии (A). Что же касается пункта (C) проблемы, то долгое время считалось, что И. Племелем дано положительное решение и в этой версии. Однако, как показали А.Т. Кох[6] и Ю.С. Ильяшенко[7], И. Племель доказал лишь следующее: если одна из матриц монодромии является диагонализируемой, то проблема (C) имеет положительное

[2] Болибрух, А.А. Проблема Римана – Гильберта / А.А. Болибрух // Успехи матем. наук. – 1990. – Т. 45, вып. 2. – С. 3–47.

[3] Еругин, Н.П. Проблема Римана / Н.П. Еругин. – Минск : Наука и техника, 1982. – 336 с.

[4] Plemelj, J. Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe / J. Plemelj // Monatsh. Math. Phys. – 1908. – Bd. 19, № 1. – P. 211–245.

[5] Röhrl, H. Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialglichungen / H. Röhrl // Math. Ann. – 1957. – Bd. 133. – S. 1–25.

[6] Kohn, T. Un resultat de Plemelj / T. Kohn // Progr. Math. – Birkhäuser, Boston, – 1983. – Vol. 37. – P. 307–312.

[7] Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. напр. / науч. ред. Р.В. Гамкрелидзе. – М. : ВИНИТИ, 1985. – Т. 1 : Динамические системы–1. – С. 7–149.

решение. Тот же факт, что в общей ситуации версия (С) имеет отрицательное решение, доказал в 1989 г. А.А. Болибрух[8], построив соответствующий пример.

Если говорить о работах по проблеме Римана – Гильберта, касаясь методов ее решения, то их можно разбить на три группы[9]:

1. Решение проблемы на основе теории интегральных уравнений (Д. Гильберт, И. Племель, Н.И. Мусхелишвили, И.Н. Векуа и др.);

2. Использование теории голоморфных расслоений и их свойств на различных комплексных многообразиях (Х. Рёрль, Г. Настольд, Р. Жерар, А.А. Болибрух и др.);

3. Сведение решения к явному построению фуксового уравнения по заданной монодромии (А. Пуанкаре, Э. Пикар, И.А. Лаппо-Данилевский, Н.Е. Кочин, Б.Л. Крылов, Н.П. Еругин, В.П. Лексин и др.).

В статьях 1968 г. и 1972 г. Р. Жерара[10] и Р. Жерара и А. Левеля[11] рассматривается многомерная проблема Римана – Гильберта, суть которой состоит в реализации представлений фундаментальной группы дополнения к дивизору в комплексном многообразии, как представлений монодромии аналитических систем дифференциальных уравнений с максимально простыми особенностями на дивизоре.

Данная диссертация относится к конструктивной теории дифференциальных уравнений и посвящена построению уравнений Фукса и линейных уравнений Пфаффа типа Фукса с монодромией ранга 2 и определенно заданными группами монодромии.

Иногда, для краткости формулировок некоторых положений, целесообразным является следующее соглашение.

Проблему Римана – Гильберта для уравнений Фукса на комплексной проективной прямой с монодромией ранга 2 и четырьмя особыми точками будем называть задачей Римана – Гильберта с условием (2; 4).

Проблему Римана – Гильберта для линейных уравнений Пфаффа типа Фукса на n-мерном комплексном проективном пространстве с монодромией ранга 2 и m особыми поверхностями будем называть многомерной задачей Римана – Гильберта с условием (2; m).

---

[8] Болибрух, А.А. Проблема Римана – Гильберта на комплексной проективной прямой / А.А. Болибрух // Матем. заметки. – 1989. – Т. 46, вып. 3. – С. 118–120.

[9] Лексин, В.П. Линейные матричные уравнения с нильпотентной монодромией / В.П. Лексин // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа : Межвуз. сб. / Яросл. гос. ун-т. – Ярославль, 1978. – С. 121–129.

[10] Gérard, R. Theorie de Fuchs sur une variete analytique complexe / R. Gérard // J. Math. pures et appl. – 1968. – Vol. 47, № 4. – P. 321–404.

[11] Gérard, R. Etude d’une classe particuliere de systemes de Pfaff du type de Fuchs sur l’espace projectif complexe / R. Gérard, A.H.M. Levelt // J. Math. pures et appl. – 1972. – Vol. 51, № 2. – P. 189–217.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Работа над диссертацией проводилась на кафедре дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета в соответствии с:

– государственной программой фундаментальных исследований «Математические модели» по теме «Качественное и аналитическое исследование дифференциальных систем со свойством Пенлеве и семейств динамических систем», номер госрегистрации № 20061795, срок выполнения 2006 г. – 2010 г.;

– государственной программой научных исследований «Конвергенция» и подпрограммой «Математические методы» по теме «Разработка аналитических и качественных методов исследования свойств решений нелинейных дифференциальных систем», срок выполнения 2011 г. – 2015 г.

Тема диссертации утверждена Ученым советом механико-математического факультета Белорусского государственного университета, протокол № 4 от 9 декабря 2008 г.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является конструктивное решение проблемы Римана – Гильберта для новых, не исследованных ранее классов дифференциальных уравнений Фукса и линейных уравнений Пфаффа типа Фукса с заданной группой монодромии. Для достижения поставленной цели решались следующие ***задачи***:

1) вывод дифференциальных уравнений, выражающих зависимость матриц-вычетов уравнения Фукса от особых точек;

2) построение обыкновенных дифференциальных уравнений для следов от произведения матриц-вычетов в случае трех и четырех особых точек в системе Фукса второго порядка;

3) получение коммутационных соотношений для матриц-вычетов в линейном уравнении Пфаффа типа Фукса в случае пучка поверхностей.

Объектом исследования являются системы Фукса второго порядка на $\mathbf{CP}^1$, а также линейные уравнения Пфаффа типа Фукса на $\mathbf{CP}^n$.

Предмет исследования – фундаментальные матрицы решений матричных уравнений Фукса и уравнений Пфаффа типа Фукса, реализующие заданные представления монодромии.

Выбор объекта и предмета исследования обосновывается тем, что даже в тех случаях, когда известно, что проблема Римана – Гильберта, или ее многомерный аналог, имеют положительное решение, *конструктивное* решение проблемы – это область исследований, где к настоящему времени получены только отдельные, разрозненные результаты.

В диссертации используются методы комплексного анализа, общей и линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные положения:

– конструктивное решение задачи Римана – Гильберта с условием $(2;4)$ и приводимыми попарно некоммутативными, а также неприводимыми матрицами-вычетами, две или две пары из которых коммутативны;

– алгоритм конструктивного решения задачи Римана – Гильберта с условием $(2;4)$ и неприводимыми попарно некоммутативными матрицами-вычетами;

– конструктивное решение многомерной задачи Римана – Гильберта с условиями $(2;3)$ и $(2;4)$ и соответственно попарно некоммутативными и попарно некоммутативными матрицами-вычетами, порождающими разрешимую алгебру Ли.

Личный вклад соискателя

Основные результаты, изложенные в диссертации, получены лично соискателем. В совместных работах [1 – 3], [5 – 11], [13], [15], [17] научный руководитель В.В. Амелькин ставил задачи, принимал участие в обсуждении методов решения и анализе полученных результатов.

Апробация результатов диссертации

Результаты диссертационной работы неоднократно обсуждались на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета (научные руководители профессор В.И. Громак, профессор А.П. Садовский) и докладывались на:

– международной научной конференции «X Белорусская математическая конференция» (Минск, 3 – 7 ноября 2008 г.);

– XIII международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2009» (Пинск, 26 – 29 мая 2009 г.);

– международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ – 2009)» (Минск, 14 – 19 сентября 2009 г.);

– 67-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (Минск, 18 – 25 мая 2010 г.);

– молодежной летней школе «Суперкомпьютерное моделирование и визуализация в научных исследованиях» (Российская Федерация, Москва, 4 – 14 июля 2010 г.);

– международной математической конференции «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 7 – 10 декабря 2010 г.);

– XIV международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2011» (Новополоцк, 12 – 14 мая 2011 г.);

– 68-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (Минск, 16 – 19 мая 2011 г.);

– международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ – 2011)» (Минск, 12 – 17 сентября 2011 г.);

– XX международной конференции «Математика. Экономика. Образование». VII международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения». VI междисциплинарном семинаре «Фундаментальные проблемы информационных и коммуникационных технологий» (Ростов н/Д, 27 мая – 3 июня 2012 г.);

– международном научном семинаре «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ – 2012)» (Минск, 10 – 14 сентября 2012 г.);

– международной научной конференции «XI Белорусская математическая конференция» (Минск, 5 – 9 ноября 2012 г.);

– XV международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2013» (Гродно, 13 – 16 мая 2013 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 18 научных работах. Среди них 8 статей в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 3,5 авторских листа), а также 10 тезисов докладов на международных научных конференциях.

Структура и объем диссертации

Полный объем диссертации составляет 91 страницу. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, двух глав, заключения, библиографического списка. Одну страницу занимают иллюстрации, семь страниц – библиографический список, включающий 74 наименования, 18 из которых – публикации соискателя.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Содержательная часть диссертации состоит из двух глав: «Уравнения Фукса на $\mathbf{CP}^1$» и «Линейные уравнения Пфаффа типа Фукса на $\mathbf{CP}^n$».

В **разделе 1.1** дается аналитический обзор и приводятся необходимые понятия, связанные с исследуемым в главе 1 уравнением Фукса на $\mathbf{CP}^1$.

Именно, пусть $X = \mathbf{CP}^1$ – комплексная проективная прямая, a_j, $j = \overline{1, n}$, – произвольные точки из X, $\overline{M} = \bigcup_{j=1}^{n} a_j$. На открытом множестве $M = X \setminus \overline{M}$ рассмотрим уравнение Фукса

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{U_j}{x - a_j} \right) Y dx, \qquad (1)$$

где Y – квадратная матрица порядка m; U_j – $(m\times m)$-матрицы-вычеты уравнения, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{n} U_j = 0. \tag{2}$$

По теореме о сумме вычетов условие (2) означает, что точки $x=\infty$ нет среди особых точек матричного уравнения (1), чего всегда можно добиться конформным преобразованием $\mathbf{CP}^1$.

Пусть x_0 – отмеченная точка открытого множества M. Обозначим через $\Phi_{x_0}(x)$ фундаментальную матрицу решений уравнения (1), нормированную в точке x_0, через $[\gamma_j]$ – класс гомотопных замкнутых петель γ_j, выходящих из точки x_0 и охватывающих точку a_j, $j=\overline{1,n}$. Классы гомотопных петель порождают фундаментальную группу $\pi_1(M,x_0)$ открытого множества (многообразия) M. Матрица $\Phi_{x_0}^j(x)$, полученная из матрицы $\Phi_{x_0}(x)$ аналитическим продолжением вдоль петли γ_j, представляется в виде $\Phi_{x_0}^j(x)=\Phi_{x_0}(x)V_j$, где V_j – квадратная невырожденная постоянная матрица порядка m.

При этом будем иметь в виду, что для матриц V_j, $j=\overline{1,n}$, называемых матрицами монодромии, выполняется так называемое циклическое соотношение Римана

$$\prod_{j=1}^{n} V_j = E, \tag{3}$$

где E – единичная матрица, и что матрицы V_j, $j=\overline{1,n}$, порождают мультипликативную группу, которая является подгруппой общей линейной группы $GL(m;\mathbf{C})$ и называется группой монодромии[2].

Таким образом, определен гомоморфизм

$$\chi:\pi_1(M,x_0)\to GL(m;\mathbf{C}) \tag{4}$$

фундаментальной группы многообразия M в мультипликативную группу $GL(m;\mathbf{C})$ невырожденных комплекснозначных матриц порядка m.

Гомоморфизм (4) называют монодромией, или представлением монодромии уравнения (1).

Задача (проблема Римана – Гильберта[8]). Дана монодромия (4). Всегда ли существует уравнение (1), (2) с заданной монодромией (4)?

Иначе, задан гомоморфизм (4). Всегда ли существует уравнение (1), (2) с заданными особыми точками a_1, a_2, …, a_n, фундаментальная матрица решений которого реализует заданный гомоморфизм?

Приведем еще одну (эквивалентную) формулировку задачи: всегда ли можно по заданным особым точкам a_j, $j = \overline{1, n}$, и заданным постоянным матрицам V_j найти такие матрицы-вычеты U_j, чтобы матричное уравнение (1), (2) имело фундаментальную матрицу решений, матрицы монодромии которой в особых точках a_j равны соответственно матрицам V_j?[12]

Напомним также, что представление (4) называется *неприводимым*, если набор матриц монодромии V_j, $j = \overline{1, n}$, невозможно одним линейным преобразованием одновременно привести к блочному верхнему треугольному виду с одними и теми же размерами диагональных блоков.

И наоборот, представление (4) называется *приводимым*, если набор матриц монодромии V_j, $j = \overline{1, n}$, может быть одновременно приведен к верхнему треугольному виду.

В **разделе 1.2** доказываются некоторые вспомогательные утверждения, используемые в дальнейшем. В частности, доказывается

Лемма 1 [6]. Уравнение

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{4} \frac{U_j}{x - a_j} \right) Y dx \tag{5}$$

с конечными особыми точками a_j, $j = \overline{1, 4}$, заменой

$$z = A \frac{x - a_1}{x - a_4}, \qquad A = \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_1},$$

приводится к уравнению

$$dY = \left(\frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z - 1} + \frac{U_3}{z - a} \right) Y dz \tag{6}$$

с особыми точками $\overline{a}_1 = 0$, $\overline{a}_2 = 1$, $\overline{a}_3 = a$, ∞, где

$$a = \frac{(a_2 - a_4)(a_3 - a_1)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_4)}.$$

Обращаясь к разделу 1.3, где рассматривается уравнение (6) в случае приводимых попарно некоммутативных матриц-вычетов с различными собственными значениями, приведем сначала формулировку указанной выше проблемы в ее конструктивной постановке.

---

[12] Крылов, Б.Л. Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса / Б.Л. Крылов // Тр. Казан. авиац. ин-та. – 1956. – Т. 31. – С. 203–445.

Даны матрицы второго порядка W_j, $j=\overline{1,3}$. Требуется построить матричное дифференциальное уравнение (6), фундаментальная матрица $\Phi_{z_0}(z)$ которого в окрестности особых точек $\overline{a}_j$ имеет вид

$$\Phi_{z_0}(z)=\left(\Phi_j^*(z_0)\right)^{-1}\Phi_j^*(z)\left(\frac{z-\overline{a}_j}{z_0-\overline{a}_j}\right)^{W_j}, \quad j=\overline{1,3}, \tag{7}$$

где $\Phi_j^*(z)$ – матрица второго порядка, голоморфная в окрестности особой точки $z=\overline{a}_j$. Здесь матрицы U_j и надо найти как функции W_j, $j=\overline{1,3}$, и выявить природу этих функций.[13]

Замечание 1. Так как матрицы монодромии $V_j\in GL(2;\mathbf{C})$ задаются в виде

$$V_j=e^{2\pi i W_j}, \quad j=\overline{1,3}, \tag{8}$$

то при найденной фундаментальной матрице решений (7) построенного уравнения (6) она, при обходе переменной z вокруг точки $\overline{a}_k$, умножается справа (как это легко проверяется) на матрицу

$$V_k=e^{2\pi i W_k},$$

а значит, уравнение (6) будет иметь заданную монодромию.

Ниже рассматривается случай приводимых матриц W_j, $j=\overline{1,3}$. Считая, не умаляя общности рассуждений, что матрицы W_j, $j=\overline{1,3}$, уже приведены к верхнему треугольному виду, их можно записать[13] в виде

$$W_j=\begin{pmatrix}\xi_j & \beta_j\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad j=\overline{1,3}, \quad \text{а значит,}^{13} \quad U_j=\begin{pmatrix}\xi_j & \theta_j\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad j=\overline{1,3},$$

где θ_j – некоторые параметры.

Лемма 2 [6]. Если

$$1+\xi_1+\xi_2+\xi_3=0, \tag{9}$$

то

$$\theta_1=\frac{b}{a}, \quad \theta_2=\frac{1}{a-1}-\frac{b}{a-1}, \quad \theta_3=-\frac{1}{a-1}+\frac{b}{a(a-1)}, \tag{10}$$

[13] Еругин, Н.П. Проблема Римана II / Н.П. Еругин // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 5. – С. 779–799

где

$$b = \xi_1 a^{-\xi_2}(a-1)^{-\xi_1}\int a^{\xi_2}(a-1)^{\xi_1-1}da.$$

Теорема 1 [4], [12]. Если выполняется равенство (9), то фундаментальную матрицу решений уравнения (6) можно представить в виде

$$\Phi_{z_0}(z) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(z) & \varphi_{12}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где

$$\varphi_{11}(z) = \prod_{j=1}^{3}\left(\frac{z-\overline{a}_j}{z_0-\overline{a}_j}\right)^{\xi_j},$$

$$\varphi_{12}(z) = \prod_{j=1}^{3}\left(\frac{z-\overline{a}_j}{z_0-\overline{a}_j}\right)^{\xi_j}\sum_{k=1}^{3}\theta_k\int_{z_0}^{z}\prod_{j=1}^{3}\left(\frac{z-\overline{a}_j}{z_0-\overline{a}_j}\right)^{-\xi_j}\frac{dz}{z-\overline{a}_k},$$

а скалярные величины θ_k определяются равенствами (10), $\overline{a}_1 = 0,\ \overline{a}_2 = 1,\ \overline{a}_3 = a.$

Теорема 2 [6], [17]. Если выполняется равенство (9), то фундаментальная матрица решений (11) уравнения (6) имеет заданные матрицы монодромии (8) в представлении (4) при $m = 2$.

Раздел 1.4 посвящен выводу алгоритма построения уравнения Фукса с четырьмя особыми точками и неприводимыми попарно некоммутативными матрицами-вычетами в случае, когда три из четырех заданных показательных матриц монодромии уравнения (5) являются неприводимыми нильпотентными, причем такими, что никакие две из них не коммутируют.

Предлагаемый алгоритм является неформальным распространением и упрощением подхода Н.П. Еругина построения уравнений Фукса по заданным показательным матрицам монодромии с различными собственными значениями на случай заданных неприводимых нильпотентных показательных матриц монодромии (с равными собственными значениями).

В **разделе 1.5** строится уравнение Фукса с четырьмя особыми точками и неприводимыми матрицами-вычетами, две из которых коммутативны. Объектом исследования здесь является уравнение

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{3}\frac{U_j}{x-a_j}\right)Ydx, \tag{12}$$

относительно которого в диссертации доказана

Лемма 3. Уравнение (5) с конечными особыми точками $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ заменой

$$z = \frac{(a_2 + a_1 - a_4)(x - a_1) + a_1(a_1 - a_4)}{x - a_4}$$

приводится к уравнению (12) с особыми точками $a_1,\ a_2,\ a_3(a),\ \infty$, где

$$a = \frac{a_2(a_3 - a_1) + a_3(a_1 - a_4)}{a_3 - a_4}.$$

Обращаясь к уравнению (12), в разделе 1.5 рассматривается тот случай, когда две из трех заданных неприводимых нильпотентных показательных матриц монодромии коммутативны, а матрица $W_\infty = (2\pi i)^{-1} \ln V_\infty$ диагонализируема.

В данном случае показывается, как строится уравнение вида (12). Доказывается также, что фундаментальная матрица решений уравнения (12), которая реализует заданный гомоморфизм, может быть представлена в виде итерированного интеграла специального вида.

В последнем **разделе 1.6** главы 1 рассматривается задача Римана – Гильберта с условием $(2;4)$ и неприводимыми нильпотентными матрицами-вычетами, две пары из которых коммутативны.

Как показывают исследования, принципиального отличия рассматриваемого случая от предыдущего нет. Вся разница лишь только в том, что если в разделе 1.5 для показательных матриц W_2 и W_3 выполняется неравенство $h \neq -\gamma$, то в случае, рассматриваемом в разделе 1.6, уже $h = -\gamma$.

Глава 2 посвящена исследованию некоторых вопросов теории линейных уравнений Пфаффа типа Фукса на $\mathbf{CP}^n$.

В **разделе 2.1** приводятся необходимые определения, формулируется задача и дается аналитический обзор литературы, связанный с уже известными результатами, касающимися поставленной задачи.

Так, пусть $P_j(x)$ – неособые неприводимые однородные полиномы степени p_j, $j = \overline{1, s}$, $\overline{M_j} = \left\{ x \in \mathbf{CP}^n \mid P_j(x) = 0 \right\}$ – алгебраические поверхности в комплексном проективном пространстве $\mathbf{CP}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{CP}^n$.

Напомним, что полином $P_j(x)$ степени p_j называется н е о с о б ы м, если $dP_j(x) \neq 0$ для всех точек $x \in \overline{M_j} \subset \mathbf{CP}^n$, и о с о б ы м – в противном случае.

На открытом множестве $M = \mathbf{CP}^n \setminus \overline{M}$, где $\overline{M} = \bigcup\limits_{j=1}^{s} \overline{M_j}$, рассмотрим линейное уравнение Пфаффа типа Фукса

$$dY = \omega Y, \tag{13}$$

где Y – квадратная $(m \times m)$-матрица, а ω – дифференциальная 1-форма вида

$$\omega = \sum_{j=1}^{s} U_j \frac{dP_j(x)}{P_j(x)} \tag{14}$$

с постоянными квадратными порядка m матрицами U_j, предполагая, что выполняются условия

$$\omega \wedge \omega \equiv \sum_{j<i} \left[U_j, U_i\right] \frac{dP_j(x) \wedge dP_i(x)}{P_j(x) P_i(x)} \equiv 0 \tag{15}$$

и

$$\sum_{j=1}^{s} p_j U_j = 0. \tag{16}$$

Тождество (15) является условием полной интегрируемости уравнения (13), а равенство (16) означает, что уравнение (13) не имеет никаких других многообразий с фуксовыми особенностями, кроме заданных многообразий $\overline{M_j}$.

Переходя к формулировке задачи, обозначим через x_0 точку открытого множества $M = \mathbf{CP}^n \setminus \overline{M}$. Пусть, далее, $\Phi_{x_0}(x)$ – нормированная в точке x_0 фундаментальная матрица решений уравнения (13), а $[\gamma_j]$, $j = \overline{1,s}$, – образующие фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$ дополнения к алгебраическому многообразию $\overline{M}$ в $\mathbf{CP}^n$. Тогда матрицы $\Phi_{x_0}(x)$ и $\tilde{\Phi}_{x_0}(x)$, получаемые из матрицы $\Phi_{x_0}(x_0)$ аналитическим продолжением вдоль путей γ'_j и γ''_j, соединяющих точки x_0 и x, связаны соотношениями $\tilde{\Phi}_{x_0}(x) = \Phi_{x_0}(x) V_j$, где $V_j \in GL(m; \mathbf{C})$, $j = \overline{1,s}$. Таким образом, определен гомоморфизм

$$\chi : \pi_1(M, x_0) \to GL(m; \mathbf{C}) \tag{17}$$

фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$ в мультипликативную группу $GL(m; \mathbf{C})$ невырожденных комплекснозначных матриц порядка m.

Матрицы V_j (образы образующих $[\gamma_j]$ при гомоморфизме χ) порождают группу, которая называется группой монодромии уравнения Пфаффа типа Фукса (13) (обозначается $\operatorname{Im}\chi$), а сами матрицы V_j, $j = \overline{1,s}$, называют образующими группы монодромии (или матрицами монодромии).

Введем в рассмотрение так называемые показательные матрицы монодромии

$$W_j = \frac{1}{2\pi i}\ln V_j, \quad j = \overline{1, s},$$

где $\ln V_j$ – главное значение логарифмической функции от матрицы $\mathrm{Ln}\, V_j$.

Задача (обобщенная проблема Римана – Гильберта[14]). Задан гомоморфизм (17). Существует ли вполне интегрируемое уравнение Пфаффа типа Фукса (13) на $\mathbf{CP}^n$ с алгебраическим многообразием особенностей $\overline{M}$, фундаментальная матрица решений которого реализует заданный гомоморфизм?

Другими словами, когда по заданному многообразию $\overline{M}$ и образующим V_j, $j = \overline{1, s}$, группы монодромии можно построить матрицы U_j, $j = \overline{1, s}$, которые дают вполне интегрируемое уравнение Пфаффа типа Фукса?

Решение обобщенной проблемы Римана – Гильберта сводится, таким образом, к нахождению условий на многообразие $\overline{M}$ и гомоморфизм χ, при выполнении которых искомое уравнение Пфаффа типа Фукса существует.

Первые примеры отрицательного в общем случае решения обобщенной проблемы Римана – Гильберта были получены В.П. Лексиным[15] и А.А. Болибрухом[16].

В **разделе 2.2** на двух примерах показывается, что условия полной интегрируемости дифференциальных уравнений Пфаффа типа Фукса на комплексном проективном пространстве $\mathbf{CP}^n$ зависят от характера пересечения заданных алгебраических поверхностей, откуда, в частности, следует, что обобщенная проблема Римана – Гильберта не всегда имеет положительное решение.

Тем самым подтверждается высказывание В.А. Голубевой о том, что коммутационные соотношения между матрицами U_j – это первый шаг в решении обобщенной проблемы Римана – Гильберта.

В **разделе 2.3** приводится определение пучка семейства алгебраических поверхностей, играющего существенную роль в положительном решении обобщенной проблемы Римана – Гильберта.

Именно, семейство алгебраических поверхностей $\overline{M_1}, ..., \overline{M_s}$ в $\mathbf{CP}^n$ (или однородных полиномов $P_1, ..., P_s$ от $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1})$) образует пучок, если для

---

[14] Gérard, R. Le probleme de Riemann – Hilbert sur une variete analytique complexe / R. Gérard // Ann. Inst. Fourier. – 1969. – Vol. 19, № 2. – P. 1–32.

[15] Лексин, В.П. О фуксовых представлениях фундаментальной группы комплексного многообразия / В.П. Лексин // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений : Межвуз. сб. / Яросл. гос. ун-т. – Ярославль, 1979. – С. 109–114.

[16] Болибрух, А.А. Пример неразрешимой проблемы Римана – Гильберта на $\mathbf{CP}^2$ / А.А. Болибрух // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа : Межвуз. темат. сб. / Яросл. гос. ун-т. – Ярославль, 1980. – Вып. 2. – С. 60–64.

любых $k, j, i \in \overline{1, s}$, во всякой точке $x \in \overline{M_k} \cap \overline{M_j}$ полиномы P_j и P_i имеют на $\overline{M_k}$ нуль одинакового порядка.

Последнее означает, что существуют однородные полиномы Q и R от $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ такие, что $P_k(x) = \alpha_k Q(x) + \beta_k R(x)$ для всех $k = \overline{1, s}$ и некоторых $\alpha_k, \beta_k \in \mathbf{C}$. В этом случае $\deg P_1 = ... = \deg P = \deg Q = \deg R$ ($\deg P$ – степень полинома *P*) и в качестве *Q* и *R* можно взять, например, P_1 и P_2 соответственно.

Далее, прежде, чем формулировать основные результаты, полученные в разделах 2.4 и 2.5, отметим один результат В.А. Голубевой[17], который состоит в следующем: уравнение (13), (14) имеет нормированную в точке x_0 фундаментальную матрицу $\Phi_{x_0}(x)$, которая является целой функцией матриц U_j, $j = \overline{1, s}$, и представляется в виде равномерно сходящегося относительно *x* ряда

$$\Phi_{x_0}(x) = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, ..., j_\nu}^{(1,2,...,s)} J_{j_1 ... j_\nu}(\alpha) U_{j_1} ... U_{j_\nu}, \tag{18}$$

коэффициенты которого – это итерированные интегралы по пути $\alpha = [0, 1] \to M$, соединяющему точку x_0 с точкой *x*,

$$J_{j_1 ... j_\nu}(\alpha) = \int_\alpha \omega_{j_1} ... \omega_{j_\nu},$$

где

$$\omega_j = \frac{dP_j(x)}{P_j(x)}, \quad j = \overline{1, s}, \qquad J_1(\alpha) = \int_\alpha \omega_1 = \int_0^1 \omega_1(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))dt \ -$$

криволинейный интеграл, взятый по пути α, а итерированный интеграл по пути α определяется рекуррентной формулой

$$J_{12...\tau} = \int_\alpha \omega_1 ... \omega_\tau = \int_0^1 \int_{\alpha^t} (\omega_1 ... \omega_{\tau-1}) \omega_\tau(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))dt,$$

где α^t – ограничение пути α на промежуток $[0, t]$.

Решая же обобщенную проблему Римана-Гильберта, В. А. Голубева строит матрицы U_{j_k} в виде рядов, сходящихся в окрестности нулевых показательных матриц монодромии.

Что же касается диссертации, то в ней это ограничение на матрицы U_{j_k} не накладывается, а используется лишь вид матрицы (18).

В **разделе 2.4** исследуется линейное уравнение Пфаффа типа Фукса с тремя особыми поверхностями и попарно некоммутативными матрицами-

[17] Голубева, В.А. О восстановлении систем Пфаффа типа Фукса по образующим группы монодромии / В.А. Голубева // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 44, № 5. – С. 979–998.

вычетами с различными собственными значениями. Показывается, как по заданным матрицам монодромии V_j строится соответствующее уравнение Пфаффа типа Фукса. Доказывается

Теорема 3 [2]. Если алгебраические многообразия $\overline{M_j}$, $j=\overline{1,3}$, образуют пучок, порожденный гиперплоскостями, то построенное вполне интегрируемое уравнение Пфаффа типа Фукса (13), (14) с условием (2) при $n=3$ имеет фундаментальную матрицу решений вида (18) при $s=3$, реализующую заданный гомоморфизм (17) при $m=2$.

Замечание 2. Теорема 3 справедлива и в случае пучка гиперповерхностей коразмерности 1, пересекающихся по подмногообразию коразмерности 2.

Приведенные затем примеры (на $\mathbf{CP}^2$) показывают, что если собственные значения заданных показательных матриц W_1 и W_2 равны нулю и матрицы коммутируют, то фундаментальная матрица решений, реализующая заданный гомоморфизм, имеет тот же вид, что и в случае различных собственных значений.

Далее, если собственные значения заданных показательных матриц W_1 и W_2 различны и матрицы не коммутируют, то можно построить вполне интегрируемое уравнение Пфаффа типа Фукса с фундаментальной матрицей, реализующей заданный гомоморфизм и представимой в виде аналога интеграла Кристоффеля – Шварца.

Наконец, если собственные значения заданных показательных матриц W_1 и W_2 нулевые, но матрицы не коммутируют, то предложенный в диссертации подход построения искомой фундаментальной матрицы уже не «работает» и поэтому предлагается иной способ построения фундаментальной матрицы, реализующей заданный гомоморфизм, основанный на построении локальных решений посредством степенных рядов.

Заключительный **раздел 2.5** посвящен конструктивному решению обобщенной проблемы Римана – Гильберта в случае линейного уравнения Пфаффа типа Фукса с четырьмя особыми поверхностями и приводимыми попарно некоммутативными матрицами-вычетами с различными собственными значениями, порождающими разрешимую алгебру Ли.

В диссертации показывается, как по заданным матрицам W_j $j=\overline{1,4}$, можно строить *все* матрицы-вычеты уравнения (13), (14) с условием (2) при $n=4$. В частности, в качестве матриц-вычетов можно выбрать матрицы

$$U_j=\xi_j\begin{pmatrix}0 & 0\\ \dfrac{1}{h} & 1\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad U_j=\xi_j\begin{pmatrix}0 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{20}$$

где $\xi_4=-\xi_1-\xi_2-\xi_3$.

Теорема 4 [3], [13]. Если алгебраические многообразия $\overline{M_j}$, $j=\overline{1,4}$, образуют пучок, то вполне интегрируемое уравнение Пфаффа типа Фукса (13), (14) с условием (2) при $n=4$ и матрицами-вычетами (20) имеет фундаментальную матрицу решений вида (18) при $s=4$, реализующую заданный гомоморфизм (17) при $m=2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Дано конструктивное решение задачи Римана – Гильберта с условием $(2;4)$ и:

– приводимыми попарно некоммутативными матрицами-вычетами [4], [6], [10], [12], [16], [17];

– неприводимыми матрицами-вычетами, две из которых коммутативны [7], [15];

– неприводимыми нильпотентными матрицами-вычетами, две пары из которых коммутативны [1], [8], [9], [14], [18].

Выведен

– алгоритм конструктивного решения задачи Римана – Гильберта с условием $(2;4)$ и неприводимыми попарно некоммутативными матрицами-вычетами [8].

Дано конструктивное решение многомерной задачи Римана – Гильберта с:

– условием $(2;3)$ и попарно некоммутативными матрицами-вычетами [2], [5], [11];

– условием $(2;4)$ и попарно некоммутативными матрицами-вычетами, порождающими разрешимую алгебру Ли [3], [13].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационного исследования имеют теоретический характер. Они могут быть использованы при построении уравнений Фукса и линейных уравнений Пфаффа типа Фукса, имеющих заданную группу монодромии, а также при решении интегральных уравнений, смешанных задач теории упругости, в некоторых задачах механики жидкостей и газов, в гидродинамике и теории фильтраций, в теории движения твердого тела вокруг неподвижной точки, в квантовой теории поля.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Амелькин, В.В. Решение системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и специальной группой монодромии / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 16–22.

2. Амелькин, В.В. Построение системы Пфаффа типа Фукса с тремя особыми поверхностями на комплексном проективном пространстве / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 883–887.

3. Амелькин, В.В. Построение линейной системы Пфаффа типа Фукса с алгебраическим многообразием особенностей / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 768–776.

4. Василевич, М.Н. Построение системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и разрешимой группой монодромии / М.Н. Василевич // Вест. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2011. – № 1. – С. 62–67.

5. Amel'kin, V.V. Construction of a Pfaff system of Fuchs type with three singular surfaces on $\mathbf{CP}^n$ / V.V. Amel'kin, M.N. Vasilevich // Analytical Methods of Analysis and Differential Equations : AMADE 2009, Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, Cambridge, UK. – 2012. – P. 1–8.

6. Амелькин, В.В. Построение на комплексной проективной прямой уравнения Фукса с четырьмя особыми точками и заданными приводимыми 2x2-матрицами монодромии / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 6. – С. 683–689.

7. Амелькин, В.В. Построение на комплексной проективной прямой системы Фукса с четырьмя особыми точками и нильпотентными неприводимыми матрицами-вычетами / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Весн. Магіл. дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. Сер. B. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія) : навукова-метадычны часопіс. – 2013. – №. 2. – С. 5–17.

8. Амелькин, В.В. Построение системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и неприводимыми матрицами-вычетами / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2013. – № 4. – С. 107-117.

Тезисы докладов научных конференций

9. Амелькин, В.В. Решение системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // X Белорусская математическая конференция : тезисы докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г. : в 4 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; под ред. С.Г. Красовского, А.А. Лепина. – Минск, 2008. – Ч. 2. – С. 3.

10. Амелькин, В.В. Система Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и разрешимой группой монодромии / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // XIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2009) : тезисы докл. Междунар. науч. конф., Пинск, 26–29 мая 2009 г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: В.В. Амелькин [и др.]. – Минск, 2009. – С. 7 –8.

11. Амелькин, В.В. Построение системы Пфаффа типа Фукса с тремя особыми поверхностями на $\mathbf{CP}^n$ / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // АМАДЕ : тезисы докл. междунар. конф., Минск, 14–19 сент. 2009 г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; под ред. А.А. Килбаса, С.В. Рогозина. – Минск, 2009. – С. 19.

12. Василевич, М.Н. Построение системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и разрешимой группой монодромии / М.Н. Василевич // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тезисы докл. Междунар. науч. конф., Минск, 7–10 дек 2010 г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2010. – С. 6–7.

13. Амелькин, В.В. Построение линейной системы Пфаффа с четырьмя особыми поверхностями / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Еругинские чтения – 2011 : тезисы докл. XIV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Новополоцк, 12–14 мая 2011 г. / Полоц., гос. ун-т ; редкол.: И.В. Гайшун (председатель) [и др.]. – Новополоцк, 2011. – С. 3–4.

14. Василевич, М.Н. Построение системы Фукса с диагонализируемой матрицей-вычетом / М.Н. Василевич // Еругинские чтения – 2011 : тезисы докл. XIV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Новополоцк, 12–14 мая 2011 г. / Полоц., гос. ун-т ; редкол.: И.В. Гайшун (председатель) [и др.]. – Новополоцк, 2011. – С. 8–9.

15. Амелькин, В.В. Матрицы-вычеты системы Фукса на $\mathbf{CP}^1$ / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // АМАДЕ : тезисы докл. междунар. конф., Минск, 12–17 сент. 2011 г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; под ред. С.В. Рогозина. – Минск, 2011. – С. 20.

16. Василевич, М.Н. Стационарные решения системы дифференциальных уравнений Н.П. Еругина / М.Н. Василевич // XX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». VII международный симпозиум

«Ряды Фурье и их приложения». VI Междисциплинарный семинар «Фундаментальные проблемы информационных и коммуникационных технологий» : тезисы докл., Ростов н/Д, 27 мая – 3 июня 2012 г. / редкол.: В.В. Новиков мл. (отв. ред.) [и др.]. – Ростов н/Д : Изд. СКНЦ ВШ ЮФУ, 2012. – С. 49–50.

17. Амелькин, В.В. Об одной обратной задаче теории уравнений Фукса / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // XI Белорусская математическая конференция : тезисы докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 нояб. 2012 г. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; под ред. С.Г. Красовского, В.В. Лепина. – Минск, 2012. – Ч. 2. – С. 3–4.

18. Василевич, М.Н. О системе Н.П. Еругина для матричного уравнения Фукса / М.Н. Василевич // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2013) : тезисы докл. Междунар. науч. конф. Гродно, 13–16 мая 2013 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. – Минск, 2013. – Ч. 1. – С. 7–8.

РЭЗЮМЭ

Васілевіч Міхаіл Мікалаевіч

Лінейныя ўраўненні Пфафа тыпу Фукса
з зададзенай групай манадраміі

Ключавыя словы. Задача Рымана – Гільберта, мнагамерная задача Рымана – Гільберта, прыводзімыя матрыцы-рэшты, непрыводзімыя матрыцы-рэшты.

Мэта работы. Пабудова ўраўненняў Фукса і лінейных ураўненняў Пфафа тыпу Фукса з зададзенай групай манадраміі.

Метады даследавання. Метады камплекснага аналізу, агульнай і лінейнай алгебры, тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна.

Дадзена канструктыўнае рашэнне задачы Рымана – Гільберта з умовай $(2;4)$ і:

– прыводзімымі парамі некамутатыўнымі матрыцамі-рэштамі;

– непрыводзімымі матрыцамі-рэштамі, дзве з якіх камутатыўны;

– непрыводзімымі нільпатэнтнымі матрыцамі-рэштамі, дзве пары з якіх камутатыўны.

Выведзен

– алгарытм канструктыўнага рашэння задачы Рымана – Гільберта з умовай $(2;4)$ і непрыводзімымі парамі некамутатыўнымі матрыцамі-рэштамі.

Дадзена канструктыўнае рашэнне мнагамернай задачы Рымана – Гільберта з:

– умовай $(2;3)$ і парамі некамутатыўнымі матрыцамі-рэштамі;

– умовай $(2;4)$ і парамі некамутатыўнымі матрыцамі-рэштамі, якія параджаюць вырашальную алгебру Лі.

Усе атрыманыя вынікі з'яўляюцца новымі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Вынікі дысертацыйнага даследавання могуць быць выкарыстаны для практычнай пабудовы ўраўненняў Фукса і лінейных ураўненняў Пфафа тыпу Фукса з рознымі зададзенымі групамі манадраміі. Яны могуць быць выкарыстаны і ў навучальным працэсе.

Вобласць прымянення. Інтэгральныя ўраўненні, змешаныя задачы тэорыі пругкасці, задачы механікі вадкасці і газаў, гідрадыныміка і тэорыя фільтрацыі, тэорыя руху цвёрдага цела вакол нерухомага пункту, квантава тэорыя поля.

РЕЗЮМЕ

Василевич Михаил Николаевич

Линейные уравнения Пфаффа типа Фукса с заданной группой монодромии

Ключевые слова. Задача Римана – Гильберта, многомерная задача Римана – Гильберта, приводимые матрицы-вычеты, неприводимые матрицы-вычеты.

Цель работы. Построение уравнений Фукса и линейных уравнений Пфаффа типа Фукса с заданной группой монодромии.

Методы исследования. Методы комплексного анализа, общей и линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений.

Полученные результаты и их новизна.

Дано конструктивное решение задачи Римана – Гильберта с условием $(2;4)$ и:

– приводимыми попарно некоммутативными матрицами-вычетами;

– неприводимыми матрицами-вычетами, две из которых коммутативны;

– неприводимыми нильпотентными матрицами-вычетами, две пары из которых коммутативны.

Выведен

– алгоритм конструктивного решения задачи Римана – Гильберта с условием $(2;4)$ и неприводимыми попарно некоммутативными матрицами-вычетами.

Дано конструктивное решение многомерной задачи Римана –Гильберта с:

– условием $(2;3)$ и попарно некоммутативными матрицами-вычетами;

– условием $(2;4)$ и попарно некоммутативными матрицами-вычетами, порождающими разрешимую алгебру Ли.

Все полученные результаты являются новыми.

Рекомендации по использованию. Результаты диссертационного исследования могут быть использованы при практическом построении уравнений Фукса и линейных уравнений Пфаффа типа Фукса с различными заданными группами монодромии. Они могут быть использованы и в учебном процессе.

Область применения. Интегральные уравнения, смешанные задачи теории упругости, задачи механики жидкостей и газов, гидродинамика и теория фильтрации, теория движения твердого тела вокруг неподвижной точки, квантовая теория поля.

SUMMARY

Vasilevich Mikhail Nikolaevich

Linear Pfaff equations of Fuchsian type with a given monodromy group

Key words. Riemann – Hilbert problem, multidimensional Riemann – Hilbert problem, reducible matrices-residues, irreducible matrices-residues.

Purpose of work. Construction of the Fuchsian equations and linear Pfaff equations of Fuchsian type with a given monodromy group.

Methods of research. Methods of complex analysis, general and linear algebra, the theory of differential equations.

Results obtained and their novelty.

Constructive solution of the Riemann – Hilbert problem with condition $(2; 4)$ in the following cases is given:

– matrices-residues are reducible and pairwisely noncommutative ones;

– matrices-residues are irreducible and two of them are commutative ones;

– matrices-residues are irreducible nilpotent and two pairs of them are commutative ones.

Algorithm of constructive solution of the Riemann – Hilbert problem with condition $(2; 4)$ in the case of irreducible pairwisely noncommutative matrices-residua is deduced.

Constructive solution of the multidimensional Riemann – Hilbert problem with conditions $(2; 3)$ and $(2; 4)$ in the following cases accordingly is given:

– matrices-residues are pairwisely noncommutative ones;

– matrices-residues are pairwisely noncommutative and generating a solvable Lie algebra.

All of listed results are new.

Recommendations for use. The results of the thesis can be used for constructing Fuchsian equations, linear Pfaff equations of Fuchsian type with the given different monodromy groups and in educational process.

Range of application. Integral equations, mixed problems of theory of elasticity, problems of fluid and gas mechanics, hydrodynamics and theory of filtration, theory of motion of a rigid body about a fixed point, quantum field theory.