Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Объект авторского права

УДК 517.925

Маковецкая
Ольга Александровна

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Гродно, 2023

Научная работа выполнена в Государственном научном учреждении «Институт технологии металлов НАН Беларуси»

Научный руководитель **Лаптинский Валерий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории модифицирования сплавов Государственного научного учреждения «Институт технологии металлов НАН Беларуси»

Официальные оппоненты: **Деменчук Александр Константинович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси»

Сидоренко Иван Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий учреждения образования «Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова»

Оппонирующая организация: Белорусский государственный университет

Защита состоится 22 декабря 2023 г. в 12^{00} на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 225.

Телефон ученого секретаря: (+375 152) 74 43 76; (+375 152) 73 19 26.

E-mail: v.pronko@grsu.by, Evgenidze_IT@grsu.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГрГУ им. Янки Купалы.

Автореферат разослан 20.11.2023.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций В.А. Пронько

ВВЕДЕНИЕ

Теории периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений посвящено большое количество исследований. Столь высокий интерес ученых объясняется тем, что приемы решения этих задач составляют методологическую основу математической теории колебаний периодического типа. В XX столетии в связи с потребностями науки и техники интенсивное развитие получили не только качественные, но и аналитические, численные, численно-аналитические, а также функционально-аналитические методы.

Численно-аналитические методы позволяют для достаточно широких классов краевых задач исследовать существование решения и одновременно с помощью численных вычислительных процедур находить это решение в виде последовательности функций, а также оценить отклонения точного решения от его приближений. При этом используются также аналитические вычислительные операции, связанные с представлением решений в форме рядов или последовательных приближений. Очевидно, аналитические решения с точки зрения качественного и количественного анализа удобнее численных. Например, некоторые подходы дают не только эффективные приемы получения аналитических решений, но и могут быть использованы для получения численно-аналитических решений сложных прикладных краевых задач, которые ранее решались только численно.

Поскольку в математической литературе не существует универсальных методов исследования краевых задач, то вполне естественной является разработка таких методов применительно к отдельным классам задач. Из этих методов следует выделить так называемые конструктивные методы, которые дают эффективные условия разрешимости краевых задач и удобные для практического применения алгоритмы построения их решений. Отметим, что в теории периодических краевых задач для исследования разрешимости и построения решений широко используются различные аналитические методы: как классические (метод малого параметра Ляпунова – Пуанкаре, метод последовательных приближений, метод рядов Фурье), так и обобщения и модификации этих методов. В излагаемой работе наряду с классическим методом последовательных приближений используются его модификации, вытекающие из конструктивного метода регуляризации[1]. Установлено, что в рассмотренных случаях эти модификации являются более эффективным средством построения приближённых решений исследуемой задачи.

Следует отметить, что разработка методов построения решений краевых задач для многомерных систем дифференциальных уравнений специального вида далека до завершения. К таким системам относятся матричные

---

[1] Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

дифференциальные уравнения Риккати, Ляпунова[2,3,4] и их обобщения[5,6,7], играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений. Поэтому развитие конструктивных методов применительно к этим краевым задачам представляется актуальным. В данной работе это воплощено в периодической краевой задаче для обобщения уравнения Риккати.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертационная работа выполнена в рамках подзадания «Разработка и приложение конструктивных методов анализа краевых задач для нелинейных дифференциальных систем» («Конвергенция 1.2.01», сроки выполнения 2011–2015 гг., номер госрегистрации 20110655) в Государственной программе научных исследований «Конвергенция», подпрограмма «Математические методы», в рамках подзадания «Конструктивный анализ краевых задач для нелинейно возмущенных матричных дифференциальных уравнений» в Государственной программе научных исследований «Конвергенция–2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем» (сроки выполнения 2016–2020 гг., номер госрегистрации 20162114).

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Целью работы является изучение разрешимости и построение решений (на основе конструктивных методов) периодической краевой задачи для обобщения матричного дифференциального уравнения Риккати.

Для достижения поставленной цели в диссертации решались следующие задачи: получение с помощью различных регуляризаций (лево- и правосторонней, а также двусторонней) конструктивных достаточных условий существования и единственности решения, разработка алгоритмов его отыскания и получение оценок области локализации.

В представленной работе объектом исследования является периодическая краевая задача для матричного уравнения, представляющего собой обобщение уравнения Риккати:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t,X),\ X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$X(0) = X(\omega).$$

---

[2] Reid, W. T. Riccati Differential equations / W. T. Reid. – New York, London, 1972.

[3] Параев, Ю. И. Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю. И. Параев. – Томск : Томский госуниверситет, 1989. – 166 с.

[4] Егоров, А. И. Уравнения Риккати / А. И. Егоров. – М. Физматлит, 2001. – 320 с.

[5] Захар-Иткин, М. Х. Об одном классе граничных задач, имеющем применения в теории многоволновых линий передач / М. Х. Захар-Иткин // УМН, 1970. – Т. XXV, вып. 5 (155). – С. 240-241.

[6] Murty, K. N. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – V. 167. – P. 505–515.

[7] Murty, K. N. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems associated with an n-th order nonlinear system of differential equations – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, G. V. R. L. Sarma // Mathem. Probl. in Engineering – 2000. – V. 6. – P. 395–410.

Предметом исследования является решение периодической краевой задачи для указанного уравнения.

Научная новизна

Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми.

Развита методика редукции периодической краевой задачи для матричного уравнения, представляющего собой обобщение матричного уравнения Риккати к эквивалентным интегральным задачам.

Разработаны алгоритмы построения приближённых решений указанной задачи и изучена их аналитическая структура, определяемая используемыми регуляризаторами и соответствующими вычислительными схемами.

Даны конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости задачи и априорные оценки области локализации решения. Эти результаты получены явно: в терминах задачи.

Положения, выносимые на защиту

1. Алгоритмы построения и аналитическая структура точного и приближённых решений периодической краевой задачи для обобщения матричного дифференциального уравнения Риккати, условия сходимости которых совпадают с условиями ее однозначной разрешимости.
2. Достаточные условия существования и единственности решений периодической краевой задачи для обобщения матричного дифференциального уравнения Риккати в различных невырожденных случаях.
3. Оценки области локализации этих решений.

Личный вклад соискателя ученой степени

Основные результаты, приведенные в диссертации, получены соискателем самостоятельно. Роль научного руководителя В. Н. Лаптинского, в соавторстве с которым выполнены работы [1; 3; 5; 6; 26; 27; 31–34], состояла в постановке задачи, помощи в выборе методики исследований и анализе полученных результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертации были представлены и докладывались на следующих международных математических конференциях и семинарах:

Международной математической конференции «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2010» (Минск, 7–10 декабря 2010 г.); «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2015» (Минск, 7–10 декабря 2015 г.); «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2021» (Минск, 1–4 июня 2021 г.);

Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2011, 2014, 2017, 2018, 2019, 2022, 2023» (Новополоцк, 12–14 мая 2011 г.; Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.; Минск, 16–20 мая 2017 г.; Гродно, 15–18 мая 2018 г.; Могилев, 14–17 мая 2019 г.; Полоцк, 31 мая – 3 июня 2022 г.; Могилев, 23–25 мая 2023 г.);

Международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (АМАДЕ–2011, 2018) (Минск, 12–17 сентября 2011 г.; Минск, 17–21 сентября 2018 г.);

Международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (Брест, 17–22 сентября 2012 г.);

Международной научной конференции «XI Белорусская математическая конференция», «XII Белорусская математическая конференция» (Минск, 5–9 ноября 2012 г.; Минск, 5–10 сентября 2016 г.);

Международной научно-технической конференции «Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии» (Могилев, 25–26 апреля 2019 г.; Могилев, 23–24 апреля 2020 г.; Могилев, 22–23 апреля 2021 г.; Могилев, 21–22 апреля 2022 г.; Могилев, 23–25 апреля 2023 г.);

Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы науки и техники» (Сарапул, май 2021 г.; Сарапул, май 2022 г.);

Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование» (СТММ–2022) (Ижевск, 13–17 июня 2022 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 34 научных работах (17,82 авт. л.), из которых 7 – статьи в рецензируемых научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (3,5 авт. л.); 16 – материалы научных конференций (1,2 авт. л.); 7 – тезисы докладов (0,22 авт. л.), 4 – другие публикации (12,9 авт. л.). Без соавторов опубликованы 3 статьи в рецензируемых журналах.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, списка использованных источников, приложений.

Объем диссертации составляет 98 страниц. Полный объем диссертации – 176 страниц. Список использованных источников насчитывает 156 наименования, из которых 124 – библиографический список, 34 – публикации соискателя ученой степени, и занимает 13 страниц; 64 страницы – приложения, содержащие промежуточные математические выкладки и числовые данные к иллюстративным примерам.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации и приводятся основные направления исследования.

В **первой главе** дается краткий обзор литературы и основных методов исследования начальных и краевых задач для многомерных систем дифференциальных уравнений. Рассмотрены работы других авторов, посвященные решению двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изложена суть конструктивного метода[1] исследования краевых задач для многомерных систем дифференциальных уравнений, применяемого автором в диссертационной работе. Согласно[8], под конструктивными методами понимают определенные методы построения решений различных классов уравнений, исследования существования и свойств точных и приближённых решений. Основной характеристикой конструктивных методов является возможность с их помощью доводить решение задачи до конечного результата (вплоть до численных значений), а также практически проверять те теоретические предпосылки и условия, которые обеспечивают правомочность применения этих методов к конкретным классам задач. Эти методы получили существенное развитие в работах В. И. Зубова, Ю. А. Рябова, А. М. Самойленко, Дж. Хейла и др.

В каждой из глав 2–4 приведены теоремы, посвященные изучению однозначной разрешимости и построению решения исследуемой задачи по методам регуляризации[1,9,10,11]. Согласно[12], методы регуляризации – это методы сведения некорректных задач к задачам, корректным в том или ином смысле. Если по методу регуляризации[13] *интегральное уравнение первого рода сводится к эквивалентному интегральному уравнению второго рода*, то по описываемому методу исследуемая *краевая задача в итоге эквивалентна уравнению такого типа.*

Методы регуляризации[1,9,10,11] в целом представляют собой развитие метода интегральных уравнений в теории краевых задач.

В основу используемого и развиваемого в диссертационной работе метода положены методики, по которым с помощью регуляризаторов[1,9,10,11] краевая задача сводится к эквивалентным интегральным уравнениям второго рода.

Регуляризация выполнена на основе линейной части изучаемого уравнения, при этом регуляризация двусторонняя, если участвуют оба слагаемых уравнения, в других случаях – односторонняя. Рассмотрены невырожденные случаи, т. е. когда соответствующие матрицы однозначно обратимы.

Приведенные теоремы дают не только область существования изолированного решения краевой задачи, но и оценки области его

---

[8] Самойленко, А. М. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. – Киев : Наукова думка, 1992. – 280 с.

[9] Лаптинский, В. Н. Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальных уравнений/ В. Н. Лаптинский // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1990. – № 5. –С. 25–30.

[10] Лаптинский, В. Н. К регуляризации периодической краевой задачи для существенно нелинейных неавтономных дифференциальных систем / В. Н. Лаптинский // XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения 2023): материалы Междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: С. Г. Красовский [и др.]. – 2019. – Ч. 1. – С. 81–82.

[11] Лаптинский, В. Н. К методам регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений / В. Н. Лаптинский // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 1–4 июня 2021 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: С. Г. Красовский [и др.]. – 2021. – С. 98–100.

[12] Краснов, М. Л. Интегральные уравнения. (Введение в теорию) / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1975. – 303 с.

[13] Забрейко, П. П. Интегральные уравнения / П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский – М. : Наука, 1968. – 448 с.

локализации[1], необходимые при реализации соответствующих алгоритмов, в первую очередь алгоритмов классического типа.

Приведенные результаты представляют собой развитие и обобщение соответствующих результатов, полученных В. Н. Лаптинским по уравнениям Ляпунова и Риккати на основе двусторонней регуляризации; для односторонних регуляризаций они дополняют их по уравнению Ляпунова. Условия однозначной разрешимости – в терминах задачи, алгоритмы построения решения – достаточно удобные для применений как содержащие простые вычислительные операции. Двусторонняя регуляризация связана с построением решения матричного алгебраического уравнения Ляпунова, методы решения которого даны в работах А. М. Ляпунова, Р. Беллмана, А. К. Деменчука и Е. К. Макарова, В. В. Шестопала и других. Исследованию аналитической структуры матричных дифференциальных уравнений различных типов и их решений посвящены работы В. П. Деревенского[14].

В диссертации исследуется периодическая краевая задача для матричного уравнения, представляющего собой обобщение уравнения Риккати

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t,X) \equiv G(t,X),\ X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что нелинейная матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t,X): t \in I,\ \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально), $F(t,0) \not\equiv 0$, $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \le \infty$.

Рассмотрение уравнения (1) позволяет проанализировать, развить и обобщить соответствующие результаты по периодической краевой задаче для уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t,X),\ X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (3)$$

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t),\ X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}. \quad (4)$$

Термин «nonlinear Lyapunov systems», по-видимому, впервые появился в работе[6], а затем в работах[7,15].

Ранее задача (1), (2) никем не изучалась.

Далее в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I}\|X(t)\|$ исследуются вопросы однозначной

[14] Деревенский, В.П. Матричные дифференциальные уравнения в базисе алгебр Ли : автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук : 01.01.02 / В.П. Деревенский; Казанский государственный университет. – Казань, 2001. – 29 с.

[15] Лаптинский, В.Н. Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий, В.В. Пугин – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2012. – 168 с.

разрешимости, построения решения задачи (1), (2). Здесь $\|\cdot\|$ – норма матрицы в рамках определения этой алгебры, например любая из норм[16].

Во **второй главе** рассмотрены невырожденные случаи с односторонней регуляризацией на основе линейной части уравнения.

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega)=\int_0^{\omega} A(\tau)d\tau,\ \ \tilde{B}(\omega)=\int_0^{\omega} B(\tau)d\tau,$$

$$D_\rho=\{(t,X):0\le t\le\omega,\|X\|\le\rho\},\ D=\{X(t):\|X\|_C\le\rho\},\ \tilde{\gamma}=\left\|\tilde{A}^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\tilde{\tilde{\gamma}}=\left\|\tilde{B}^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\alpha=\max_{t\in I}\|A(t)\|,\ \beta=\max_{t\in I}\|B(t)\|,\ \delta=\max_{t\in I}\|Q(t)\|,\ h=\max_{t\in I}\|F(t,0)\|,$$

$$K_A(t,\tau)=\begin{cases}\int_0^{\tau}A(\sigma)d\sigma,\ 0\le\tau\le t\le\omega,\\ -\int_{\tau}^{\omega}A(\sigma)d\sigma,\ 0\le t<\tau\le\omega,\end{cases}\qquad K_B(t,\tau)=\begin{cases}\int_0^{\tau}B(\sigma)d\sigma,\ 0\le\tau\le t\le\omega,\\ -\int_{\tau}^{\omega}B(\sigma)d\sigma,\ 0\le t<\tau\le\omega,\end{cases}$$

$$\varphi=\varphi(\rho)=\tilde{\gamma}\delta\omega\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right)\rho^2+\tilde{\gamma}\omega\left[\beta+L+\frac{1}{2}\alpha\omega(\alpha+\beta+L)\right]\rho+\tilde{\gamma}\omega h\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right),$$

$$q=q(\rho)=\tilde{\gamma}\delta\omega(\alpha\omega+2)\rho+\frac{1}{2}\tilde{\gamma}\alpha\omega^2(\alpha+\beta+L)+\tilde{\gamma}\omega(\beta+L),$$

$$\psi=\psi(\rho)=\tilde{\tilde{\gamma}}\delta\omega\left(1+\frac{1}{2}\beta\omega\right)\rho^2+\tilde{\tilde{\gamma}}\omega\left[\alpha+L+\frac{1}{2}\beta\omega(\alpha+\beta+L)\right]\rho+\tilde{\tilde{\gamma}}\omega h\left(1+\frac{1}{2}\beta\omega\right),$$

$$p=p(\rho)=\tilde{\tilde{\gamma}}\delta\omega(\beta\omega+2)\rho+\frac{1}{2}\tilde{\tilde{\gamma}}\beta\omega^2(\alpha+\beta+L)+\tilde{\tilde{\gamma}}\omega(\alpha+L),$$

где $0<\rho<\tilde{\rho}$, $L=L(\rho)>0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ.

В **разделе 2.1** анализ задачи проведен на основе метода левосторонней регуляризации с применением интегрального тождества-регуляризатора

$$\int_0^{\omega}A(\tau)X(\tau)d\tau=\tilde{A}(\omega)X(t)-\int_0^{t}\left(\int_0^{\tau}A(\sigma)d\sigma\right)dX(\tau)+\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega}A(\sigma)d\sigma\right)dX(\tau).$$

Задача (1), (2) рассматривалась в случае, когда $\det\tilde{A}(\omega)\ne 0$.

Будем говорить, что для системы (1), (2) выполняется условие $\mathcal{M}_1$, если, $\varphi(\rho)\le\rho$, $q<1$.

Теорема 2.1 [1; 31]. *Пусть выполнено условие* $\mathcal{M}_1$. *Тогда в области* D_ρ *решение задачи* (1), (2) *существует и единственно, при этом справедлива оценка* $\|X\|_C\le\varphi(\rho)$.

[16] Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.

Для доказательства теоремы сначала выведено матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2):

$$X(t)=\tilde{A}^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)G(\tau,X(\tau))d\tau-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)G(\tau,X(\tau))d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_0^\omega\left[X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau\right\}. \qquad (5)$$

Разрешимость уравнения (5) исследована с помощью принципа Каччопполи – Банаха сжимающих отображений. Доказано, что решение $X=X(t)$ существует и единственно.

Для построения решения уравнения (5) разработаны итерационные алгоритмы с различными вычислительными схемами.

В **подразделе 2.1.2** исследован алгоритм с вычислительной схемой классического типа.

Следствие 2.1 [1; 31]. *При выполнении условия* $\mathcal{M}_1$ *решение* $X=X(t)$ *задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся по* $t\in I$ *последовательности матричных функций, определяемых реккурентным соотношением классического типа*:

$$X_{k+1}(t)=\tilde{A}^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)G(\tau,X_k(\tau))d\tau-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)G(\tau,X_k(\tau))d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_0^\omega\left[X_k(\tau)B(\tau)+X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F(\tau,X_k(\tau))\right]d\tau\right\},\ k=0,1,2,..., \qquad (6)$$

где $X_0(t)$ *– произвольная матричная функция класса* $C[0,\omega]$, *принадлежащая множеству* D.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (6). Соответствующие результаты представляют оценки

$$\|X-X_k\|_C\le\frac{q^k}{1-q}\|X_1-X_0\|_C,\ k=0,1,2,..., \qquad (7)$$

$$\|X\|_C\le\|X_0\|_C+\frac{\|X_1-X_0\|_C}{1-q}.$$

Приближённые решения, построенные по алгоритму (6), не обязаны удовлетворять краевому условию (2). В этом смысле эффективными являются алгоритмы с неявной и явной вычислительной схемами, полученные в подразделах 2.1.3 и 2.1.4.

В подразделе 2.1.3 разработан алгоритм с неявной вычислительной схемой построения решения.

Следствие 2.2 [3; 31]. *Пусть выполнено условие* $\mathcal{M}_1$. *Тогда решение* $X=X(t)$ *задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся по*

$t \in I$ *последовательности матричных функций, определяемых алгоритмом с неявной вычислительной схемой и удовлетворяющих условию* (2):

$$X_k(t) = \tilde{A}^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)G(\tau, X_{k-1}(\tau))d\tau - \int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)G(\tau, X_{k-1}(\tau))d\tau - \right.$$

$$\left. -\int_0^\omega\left[X_k(\tau)B(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))\right]d\tau\right\},\ k = 1,2,..., \tag{8}$$

где в качестве начального приближения X_0 *принята постоянная матрица, определяемая из условия* $X_{k+1}(0) = X_{k+1}(\omega),\ k = 0,1,2,...,$
для приближения X_1:

$$C = -\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^\omega\left[CB(\tau) + CQ(\tau)C + F(\tau, C)\right]d\tau.$$

Полученная последовательность $\left\{X_k(t)\right\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (5), при этом справедлива оценка

$$\left\|X - X_k\right\|_C \le \frac{\tilde{\tilde{q}}^k}{1 - \tilde{\tilde{q}}}\left\|X_1 - X_0\right\|_C,\ k = 1,2,..., \tag{9}$$

где $\tilde{\tilde{q}} = \dfrac{q - \tilde{q}}{1 - \tilde{q}} < q$, $\tilde{q} = \tilde{\gamma}\omega(2\delta\rho + \beta + L)$, т. е. этот алгоритм сходится быстрее, чем классический.

Алгоритм (8), как и другие алгоритмы такого типа, неудобен тем, что основан на неявной вычислительной схеме: на каждом итерационном шаге для отыскания приближённого решения приходится решать соответствующее матричное интегральное уравнение. Поэтому в **подразделе 2.1.4** разработан алгоритм с явной вычислительной схемой.

Следствие 2.3 [3; 31]. *Пусть выполнено условие* $\mathcal{M}_1$. *Тогда решение* $X = X(t)$ *задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся по* $t \in I$ *последовательности матричных функций, определяемых алгоритмом с явной вычислительной схемой и удовлетворяющих условию* (2):

$$X_{k+1}(t) = \tilde{A}^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)\left[A(\tau)X_k(\tau) + X_{k-1}(\tau)B(\tau) + X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau) + \right.\right.$$

$$+F(\tau, X_{k-1}(\tau))\Big]d\tau - \int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)\Big[A(\tau)X_k(\tau) + X_{k-1}(\tau)B(\tau) +$$

$$+X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau) + F(\tau, X_{k-1}(\tau))\Big]d\tau -$$

$$\left. -\int_0^\omega\left[X_k(\tau)B(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))\right]d\tau\right\},\ k = 1,2,...,$$

где $X_0 = 0,\ X_1 = -\tilde{A}^{-1}(\omega)\int\limits_0^{\omega} F(\tau,0)\,d\tau.$

Построенная последовательность $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ равномерно сходится к решению интегрального уравнения (5), при этом

$$\|X - X_{k+1}\|_C \le \frac{q\|X_{k+1} - X_k\|_C + q_2\|X_k - X_{k-1}\|_C}{1-q},\ k = 1,2,\ldots, \qquad (10)$$

где $q_2 = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\alpha\omega^2(2\delta\rho + \beta + L)$.

В **подразделе 2.1.5** на модельной задаче дана иллюстрация применения изложенных результатов.

В **разделе 2.2** изучение рассматриваемой задачи (1), (2) продолжено на основе правосторонней регуляризации. Краевая задача (1), (2) рассматривалась в случае, когда $\det\tilde{B}(\omega) \ne 0$.

Следуя принятому стилю изложения, полагаем, что выполнено условие $\mathcal{M}_2$ если $\psi(\rho) \le \rho$, $p < 1$.

Теорема 2.2 [2; 32]. *Пусть выполнено условие* $\mathcal{M}_2$. *Тогда в области* D_ρ *решение задачи* (1), (2) *существует и единственно, при этом справедлива оценка* $\|X\|_C \le \psi(\rho)$.

Для задачи (1), (2) в этом случае построено эквивалентное матричное интегральное уравнение, доказана его однозначная разрешимость. Разработаны следующие итерационные алгоритмы построения ее решения.

Алгоритм построения решения с классической вычислительной схемой (**подраздел 2.2.2**)

$$X_{k+1}(t) = \left\{\int\limits_0^t G(\tau, X_k(\tau))\left(\int\limits_0^{\tau} B(\sigma)d\sigma\right)d\tau - \int\limits_t^{\omega} G(\tau, X_k(\tau))\left(\int\limits_{\tau}^{\omega} B(\sigma)d\sigma\right)d\tau -\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{\omega}\left[A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))\right]d\tau\right\}\tilde{B}^{-1}(\omega),\ k = 0,1,2,\ldots$$

В данном разделе выведена оценка типа (7)

$$\|X - X_k\|_C \le \frac{p^k}{1-p}\|X_1 - X_0\|_C,\ k = 0,1,2,\ldots$$

Алгоритм построения решения с неявной вычислительной схемой (**подраздел 2.2.3**)

$$X_k(t) = \left\{\int\limits_0^t G(\tau, X_{k-1}(\tau))\left(\int\limits_0^{\tau} B(\sigma)d\sigma\right)d\tau - \int\limits_t^{\omega} G(\tau, X_{k-1}(\tau))\left(\int\limits_{\tau}^{\omega} B(\sigma)d\sigma\right)d\tau -\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{\omega}\left[A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))\right]d\tau\right\}\tilde{B}^{-1}(\omega),\ k = 1,2,\ldots$$

Алгоритм с явной вычислительной схемой (**подраздел 2.2.4**)

$$X_{k+1}(t)=\left\{\int_0^t\left[A(\tau)X_{k-1}(\tau)+X_k(\tau)B(\tau)+X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.+F(\tau,X_{k-1}(\tau))\right]\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-\int_t^\omega\left[A(\tau)X_{k-1}(\tau)+X_k(\tau)B(\tau)+\right.$$

$$\left.+X_{k-1}(\tau)Q(\tau)X_{k-1}(\tau)+F(\tau,X_{k-1}(\tau))\right]\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$\left.-\int_0^\omega\left[A(\tau)X_k(\tau)+X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F(\tau,X_k(\tau))\right]d\tau\right\}\tilde{B}^{-1}(\omega),\quad k=1,2,...$$

Доказана теорема 2.2 и следствия 2.4–2.6, аналогичные теореме 2.1 и следствиям 2.1–2.3, при этом приближённые решения, определяемые классической вычислительной схемой, не обязаны удовлетворять краевому условию. Для алгоритмов с неявной и явной вычислительными схемами получены оценки типа (9), (10), и приближённые решения удовлетворяют условию (2).

Иллюстрация применения алгоритмов изложена в **подразделе 2.2.5.**

Приведенные результаты обобщают результаты работы[17] для уравнения (4) и полученные с помощью тождества-регуляризатора:

$$\int_0^\omega\left[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)\right]d\tau=\tilde{A}(\omega)X(t)+X(t)\tilde{B}(\omega)-\int_0^\omega A(\tau)\left(\int_\tau^t dX(\sigma)\right)d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\left(\int_\tau^t dX(\sigma)\right)B(\tau)d\tau. \tag{11}$$

Глава 3 посвящена исследованию этой задачи в невырожденном случае с помощью двустороннего регуляризатора (11) на основе линейной части уравнения.

Задача рассматривается с предположением, что матрицы $\tilde{A}(\omega)$, $-\tilde{B}(\omega)$ не имеют общих характеристических чисел.

Наряду с обозначениями α, β, δ, h, L из главы 2 приняты следующие:

$$\gamma=\left\|\Phi^{-1}\right\|,$$

$$\chi=\chi(\rho)=\gamma\delta\omega\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right]\rho^2+\gamma\omega\left[L+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+L)\omega\right]\rho+$$

$$+\gamma\omega h\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right],$$

$$r=r(\rho)=\gamma\delta\omega\left[(\alpha+\beta)\omega+2\right]\rho+\frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2(\alpha+\beta+L)+\gamma\omega L,$$

где Φ – линейный оператор, $\Phi Z=\tilde{A}(\omega)Z+Z\tilde{B}(\omega)$, $Z\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

[17] Самойленко, А.М. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач / А.М. Самойленко, В.Н. Лаптинский, К.К. Кенжебаев. – Киев : Ин-т мат. НАН Украины, 1999. – 220 с.

Будем говорить, что для системы (1) выполняется условие $\mathcal{M}_3$, если $\chi(\rho)\leq\rho,\ r<1$.

В этой главе ключевую роль играет интегральная задача, эквивалентная (1), (2)

$$X(t)=\Phi^{-1}\left\{\int_0^{\omega}A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}G(\sigma,X(\sigma))d\sigma\right)d\tau+\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}G(\sigma,X(\sigma))d\sigma\right)B(\tau)d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\omega}\left[X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau\right\}. \qquad (12)$$

Теорема 3.1 [5; 33]. *Пусть выполнено условие* $\mathcal{M}_3$. *Тогда на множестве* D_ρ *уравнение* (12) *однозначно разрешимо, при этом справедлива оценка* $\|X\|_C\leq\chi(\rho)$.

Доказательство этой теоремы выполнено с помощью классического принципа Каччопполи – Банаха сжимающих отображений на множестве D, тем самым доказана однозначная разрешимость задачи (1), (2) в области D_ρ.

В этой главе разработаны следующие итерационные алгоритмы построения решения с различными вычислительными схемами.

Алгоритм построения решения с классической вычислительной схемой (**раздел 3.2**).

Следствие 3.1 [5; 33]. *При выполнении условия* $\mathcal{M}_3$ *решение* $X=X(t)$ *задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся по* $t\in I$ *последовательности матричных функций, определяемых алгоритмом классического типа:*

$$X_{k+1}(t)=\Phi^{-1}\left\{\int_0^{\omega}A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}G(\sigma,X_k(\sigma))d\sigma\right)d\tau+\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}G(\sigma,X_k(\sigma))d\sigma\right)B(\tau)d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\omega}\left[X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F(\tau,X_k(\tau))\right]d\tau\right\},\ k=0,1,2,..., \qquad (13)$$

где $X_0(t)$ *– произвольная матричная функция класса* $C[0,\omega]$, *принадлежащая множеству* D.

Полученная последовательность $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ сходится (равномерно по $t\in I$) к решению интегрального уравнения (12), при этом справедлива оценка

$$\|X-X_k\|_C\leq\frac{r^k}{1-r}\|X_1-X_0\|_C,\ k=0,1,2,...,$$

и приближённые решения не обязаны удовлетворять краевому условию (2).

Алгоритм построения решения с неявной вычислительной схемой (**раздел 3.3**).

Следствие 3.2 [33]. *Пусть выполнено условие* $\mathcal{M}_3$. *Тогда решение* $X=X(t)$ *задачи* (*1*), (*2*) *представимо как предел равномерно сходящейся по*

$t\in I$ последовательности матричных функций, определяемых алгоритмом с неявной вычислительной схемой и удовлетворяющих условию (2):

$$X_k(t)=\Phi^{-1}\left\{\int_0^{\omega}A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}G(\sigma,X_{k-1}(\sigma))d\sigma\right)d\tau+\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}G(\sigma,X_{k-1}(\sigma))d\sigma\right)B(\tau)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\omega}\left[X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F(\tau,X_k(\tau))\right]d\tau\right\},\ k=1,2,..., \quad (14)$$

где в качестве начального приближения X_0 принята постоянная матрица, определяемая из условия (2) для приближения X_1.

Полученная последовательность $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ сходится (равномерно по $t\in I$) к решению интегрального уравнения (12), при этом справедлива оценка

$$\|X-X_k\|_C\le\frac{\tilde{\tilde{r}}^k}{1-\tilde{\tilde{r}}}\|X_1-X_0\|_C,\ k=1,2,...,$$

где $\tilde{\tilde{r}}=\dfrac{r-\tilde{r}}{1-\tilde{r}}<r$, $\tilde{r}=\gamma\omega(2\delta\rho+L)$, т. е. этот алгоритм сходится быстрее, чем классический.

Алгоритм с явной вычислительной схемой (**раздел 3.4**).

Следствие 3.3 [33]. *Пусть выполнено условие $\mathcal{M}_3$. Тогда решение $X=X(t)$ представимо как предел равномерно сходящейся по $t\in I$ последовательности матричных функций, определяемых алгоритмом с явной вычислительной схемой и удовлетворяющих условию (2):*

$$X_{k+1}(t)=\Phi^{-1}\left\{\int_0^{\omega}A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\left[A(\sigma)X_k(\sigma)+X_k(\sigma)B(\sigma)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+X_{k-1}(\sigma)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma)+F(\sigma,X_{k-1}(\sigma))\right]d\sigma\right)d\tau+\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}\left[A(\sigma)X_k(\sigma)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+X_k(\sigma)B(\sigma)+X_{k-1}(\sigma)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma)+F(\sigma,X_{k-1}(\sigma))\right]d\sigma\right)B(\tau)d\tau-$$

$$\left.-\int_0^{\omega}\left[X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F(\tau,X_k(\tau))\right]d\tau\right\},\ k=1,2,..., \quad (15)$$

где в качестве начального приближения X_0 принимается нулевая матрица, приближение X_1 разыскивается в виде постоянной матрицы, дающей приближённое решение $X_2(t)$, удовлетворяющее условию (2).

Построенная последовательность $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ равномерно сходится к решению интегрального уравнения (12), при этом справедлива оценка

$$\|X-X_{k+1}\|_C\le\frac{r\|X_{k+1}-X_k\|_C+r_2\|X_k-X_{k-1}\|_C}{1-r},\ k=1,2,...,$$

где $r_2 = \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)(2\delta\rho+L)$.

Для уравнения (3) аналогичные результаты получены в работе[18], при этом в ней приведен только алгоритм с явной вычислительной схемой.

Иллюстрация применения алгоритмов (13), (14) и (15) изложена в **разделе 3.5**.

В **четвертой главе** диссертации рассмотрен невырожденный случай с помощью регуляризатора

$$\tilde{A}(\omega)Y(t)+Y(t)\tilde{B}(\omega)=\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)dY(\tau)-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)dY(\tau)+$$
$$+\int_0^t dY(\tau)\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right)-\int_t^\omega dY(\tau)\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right) \tag{16}$$

на основе линейной части уравнения, проведен анализ и установлены важные структурные свойства решений краевой задачи (1), (2), вытекающие из дополнительного интегрального условия типа Фурье.

Согласно методу[9], решение этой задачи разыскивается в виде

$$X(t)=C+Y(t), \tag{17}$$

где C – постоянная матрица; $Y(t)$ – матрица, подчиненная условиям

$$Y(0)=Y(\omega), \tag{18}$$

$$\int_0^\omega\left[A(\tau)Y(\tau)+Y(\tau)B(\tau)\right]d\tau=0, \tag{19}$$

при этом используется двусторонний регуляризатор (16).

В работе[9] этот метод предложен для исследования периодических решений линейной системы.

В этой главе ключевую роль играет интегральная задача, эквивалентная (1), (2), представленная в лемме 4.1.

Лемма 4.1 [34]. *Пусть матрицы* $\tilde{A}(\omega),-\tilde{B}(\omega)$ *не имеют общих характеристических чисел. Тогда задача* (1), (2) *в представлении* (17)–(19) *эквивалентна системе матричных уравнений*

$$C=-\Phi^{-1}\int_0^\omega\left[(C+Y(\tau))Q(\tau)(C+Y(\tau))+F(\tau,C+Y(\tau))\right]d\tau, \tag{20}$$

$$Y(t)=\Phi^{-1}\int_0^\omega\left[K_A(t,\tau)S(\tau)+S(\tau)K_B(t,\tau)\right]d\tau, \tag{21}$$

где

$$S(\tau)=A(\tau)(C+Y(\tau))+(C+Y(\tau))B(\tau)+(C+Y(\tau))Q(\tau)(C+Y(\tau))+$$
$$+F(\tau,C+Y(\tau))\equiv G(\tau,C+Y(\tau)).$$

---

[18] Лаптинский, В.Н. О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений / В.Н. Лаптинский // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 14–18.

Разрешимость задачи (20), (21) исследована с помощью обобщенного[19] принципа Каччопполи – Банаха сжимающих отображений на множестве $\tilde{D}$.

Теорема 4.1 [6; 34]. *Пусть выполнено условие* $\mathcal{M}_3$. *Тогда в области* $\tilde{D}$ *решение системы* (20), (21) *существует и единственно.*

Для построения решения системы (20), (21) разработаны итерационные алгоритмы с различными вычислительными схемами.

В **разделе 4.2** исследуется алгоритм построения решения задачи (1), (2) в представлении (17)–(19) на основе классического метода последовательных приближений.

Следствие 4.1 [7; 34]. *При выполнении условия* $\mathcal{M}_3$ *решение* $X = X(t)$ *задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся по* $t \in I$ *последовательности матричных функций, определяемых алгоритмом классического типа и удовлетворяющих условию* (19):

$$C_{k+1} = -\Phi^{-1}\int_0^{\omega}\Big[\big(C_k + Y_k(\tau)\big)Q(\tau)\big(C_k + Y_k(\tau)\big) + F\big(\tau, C_k + Y_k(\tau)\big)\Big]d\tau, \qquad (22)$$

$$Y_{k+1}(t) = \Phi^{-1}\int_0^{\omega}\big[K_A(t,\tau)S_k(\tau) + S_k(\tau)K_B(t,\tau)\big]d\tau,\ k = 0,1,2,..., \qquad (23)$$

где $S_k(\tau) = G\big(\tau, C_k + Y_k(\tau)\big)$, C_0 *– произвольная постоянная матрица, такая, что* $\|C_0\| \le \varphi_1$; $Y_0(t)$ *– матрица класса* $C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, *возможно, удовлетворяющая условию* (19), *при этом* $\|Y_0\|_C \le \varphi_2$,

$$X_k(t) = C_k + Y_k(t). \qquad (24)$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (22), (23).

Полученная последовательность $\{C_k, Y_k(t)\}_0^{\infty}$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению системы интегральных уравнений (20), (21), при этом справедлива оценка

$$\tilde{Z}_i \le (E - R)^{-1} R^i Z_0,\ i = 0,1,2,..., \qquad (25)$$

где $R = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1 & \tilde{r}_1 \\ \tilde{r}_2 & \tilde{r}_2 \end{pmatrix}$, $\tilde{r}_1 = \gamma\omega(2\delta\rho + L)$, $\tilde{r}_2 = \dfrac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)$,

$\tilde{Z}_i = col\big(\|C - C_i\|, \|Y - Y_i\|_C\big)$, $Z_0 = col\big(\|C_1 - C_0\|, \|Y_1 - Y_0\|_C\big)$.

На основе оценки (25) получена следующая оценка:

$$Z \le \tilde{Z}_0 + (E - R)^{-1} Z_0,$$

где $Z = col\big(\|C\|, \|Y\|_C\big)$, $\tilde{Z}_0 = col\big(\|C_0\|, \|Y_0\|_C\big)$.

Приближённые решения, построенные по алгоритму (22), (23), не обязаны удовлетворять краевому условию (18). В этом смысле

[19] Приближённое решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.] – М. : Наука, 1969. – 456 с.

эффективными являются алгоритмы с неявной и модифицированной (явной) вычислительными схемами, полученные в **разделах 4.3** и **4.4**.

В **разделе 4.3** разработан алгоритм построения решения с неявной вычислительной схемой.

Следствие 4.2 [7; 34]. *Пусть выполнено условие* $\mathcal{M}_3$. *Тогда решение* $X = X(t)$ *задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся по* $t \in I$ *последовательности матричных функций, определяемых, согласно* (24), *алгоритмом с неявной вычислительной схемой и удовлетворяющих условиям* (18), (19):

$$C_k = -\Phi^{-1}\int_0^{\omega}\left[\left(C_k + Y_k(\tau)\right)Q(\tau)\left(C_k + Y_k(\tau)\right) + F\left(\tau, C_k + Y_k(\tau)\right)\right]d\tau \quad (k = 1,2,...), \tag{26}$$

$$Y_k(t) = \Phi^{-1}\int_0^{\omega}\left[K_A(t,\tau)S_{k-1}(\tau) + S_{k-1}(\tau)K_B(t,\tau)\right]d\tau \quad (k = 1,2,...), \tag{27}$$

где в качестве начального приближения C_0, Y_0 *приняты постоянные матрицы, определяемые из условия (18) для приближения* C_1, Y_1, *при этом* $Y_0 = 0$,

$$C_0 = -\Phi^{-1}\int_0^{\omega}\left[C_0 Q(\tau)C_0 + F(\tau, C_0)\right]d\tau,$$

$$Y_1(t) = \Phi^{-1}\int_0^{\omega}\left[K_A(t,\tau)S_0(\tau) + S_0(\tau)K_B(t,\tau)\right]d\tau.$$

Полученная последовательность $\left\{C_k, Y_k(t)\right\}_0^{\infty}$ сходится (равномерно по $t \in I$) к решению системы C, $Y(t)$ интегральных уравнений (20), (21), при этом справедлива оценка

$$\tilde{Z}_k \le (E - H)^{-1} H^k Z_0,$$

где $H = \left(E - \tilde{R}\right)^{-1}\left(R - \tilde{R}\right)$, $\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1 & \tilde{r}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Алгоритм (26), (27) неудобен тем, что основан на неявной вычислительной схеме: на каждом итерационном шаге для отыскания соответствующего приближённого решения приходится решать систему матричных интегральных уравнений. Поэтому в **разделе 4.4** разработан алгоритм с явной вычислительной схемой.

Следствие 4.3 [6; 34]. *Пусть выполнено условие* $\mathcal{M}_3$. *Тогда решение* $X = X(t)$ *задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых алгоритмом с явной вычислительной схемой и удовлетворяющих условиям* (18), (19)

$$C_{k+1} = -\Phi^{-1}\int_0^{\omega}\left[\left(C_k + Y_k(\tau)\right)Q(\tau)\left(C_k + Y_k(\tau)\right) + F\left(\tau, C_k + Y_k(\tau)\right)\right]d\tau, \; k = 1,2,...,$$

$$Y_{k+1}(t)=\Phi^{-1}\int_0^{\omega}\left[K_A(t,\tau)S_{k,k-1}(\tau)+S_{k,k-1}(\tau)K_B(t,\tau)\right]d\tau,\ k=1,2,...,$$

где

$$S_{k,k-1}(\tau)=A(\tau)\left(C_k+Y_k(\tau)\right)+\left(C_k+Y_k(\tau)\right)B(\tau)+$$
$$+\left(C_{k-1}+Y_{k-1}(\tau)\right)Q(\tau)\left(C_{k-1}+Y_{k-1}(\tau)\right)+F\left(\tau,C_{k-1}+Y_{k-1}(\tau)\right).$$

В качестве начального приближения C_0, Y_0 принимаются нулевые матрицы, приближение C_1, Y_1 разыскивается в виде постоянных матриц, дающих приближённое решение, удовлетворяющее условиям

$$Y_{k+2}(0)=Y_{k+2}(\omega),$$

$$\int_0^{\omega}\left[A(\tau)Y_{k+1}(\tau)+Y_{k+1}(\tau)B(\tau)\right]d\tau=0,\ k=0,1,2,...$$

При этом $Y_1=0$,

$$C_1=-\Phi^{-1}\int_0^{\omega}F(\tau,0)d\tau.$$

Полученная последовательность $\left\{C_k,Y_k(t)\right\}_0^{\infty}$ сходится (равномерно по $t\in I$) к решению системы интегральных уравнений (20), (21), при этом справедлива оценка

$$\tilde{Z}_k\le(E-R)^{-1}\left(RZ_k+TZ_{k-1}\right),\ k=1,2,...,$$

где $T=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \tilde{r}_2-\tilde{\tilde{r}}_2 & \tilde{r}_2-\tilde{\tilde{r}}_2\end{pmatrix}$, $\tilde{\tilde{r}}_2=\dfrac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)^2\omega^2$.

Результаты этой главы являются новыми как для уравнения (3), так и для уравнения (4).

В **разделе 4.5** на модельной задаче дана иллюстрация применения изложенных результатов.

В целом в работе отмечена роль матриц $A(t)$, $B(t)$ при выборе типа регуляризации. Полученные эквивалентные интегральные задачи определяют решение различной структуры. Вид решения определяется соответствующим алгоритмом. При этом оно может быть построено не только итерациями, но и в виде различных рядов, суммы которых должны совпадать на пересечении их областей равномерной сходимости и давать решение задачи, а частичные суммы удовлетворять условию (2) – важнейшему требованию в методах теории колебаний.

Непосредственное отношение к разрешимости задачи имеют теоремы 2.1, 2.2, 3.1, 4.1, при этом выполнение условий одной из них, например, теоремы 4.1, не влечет за собой выполнение условий теорем 2.1, 2.2 – они могут не выполняться. В следствиях к теоремам доминируют алгоритмы (со своими достоинствами и недостатками), что соответствует названию диссертации и определению конструктивного метода.

Достоинства и недостатки алгоритмов построения решений заключаются в следующем.

Алгоритмы с классической вычислительной схемой неудобны для применений, поскольку дают приближённые решения, не обязанные удовлетворять условию периодичности, но в то же время являются универсальными, реализованы на основе простых вычислительных схем, позволяют достигнуть любой заданной точности при любом начальном приближении.

Алгоритмы с неявной вычислительной схемой неудобны тем, что на каждом итерационном шаге для отыскания приближённого решения приходится решать соответствующее матричное интегральное уравнение. Достоинство этих алгоритмов в более высокой скорости сходимости, чем алгоритмов с классической вычислительной схемой, а также в подчинении условию периодичности.

Модифицированные алгоритмы построения решения удовлетворяют условию периодичности и поэтому удобнее для применений, чем алгоритмы с классической и неявной вычислительными схемами.

Алгоритмы главы 4 выглядят громоздкими, однако они дают существенную информацию о структуре точного и приближённых решений задачи (1), (2). Алгоритмы главы 3 более компактные, но они не представляют собой принципиальную новизну в смысле вычислительных операций, хотя и являются эффективным средством решения исследуемой задачи. Из анализа результатов вычислений, выполненных в модельной задаче по алгоритмам глав 3, 4, видно, что по точности они существенно не отличаются. В то же время алгоритмы главы 4 вполне естественны для задач, связанных с использованием предлагаемой структуры решений (типа метода Фурье). Алгоритмы главы 3 удобны для применения в задачах общего характера. Общий недостаток алгоритмов главы 4 состоит в необходимости строить две матрицы в отличие от алгоритмов предыдущих глав.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Развита методика получения интегральных уравнений, эквивалентных периодической краевой задаче для обобщения матричного дифференциального уравнения Риккати в невырожденных случаях с односторонней и двусторонней регуляризацией [1–7; 31–34].

2. Получены достаточные условия однозначной разрешимости данной задачи, выраженные через ее исходные данные [1–7; 12; 24; 27; 29; 31–34].

3. Разработаны итерационные алгоритмы построения приближённых решений данной задачи с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений, а также с неявной и явной вычислительными схемами [1–11; 13–23; 25; 26; 28; 30–34].

4. Изучена аналитическая структура приближённых решений [1–11; 13; 14; 16; 18; 25; 26; 28; 31–34].

5. Установлено преимущество алгоритмов, полученных с помощью конструктивных методов регуляризации, перед алгоритмами с классической вычислительной схемой [3; 4; 7; 31–34].

6. Выведены конструктивные оценки области локализации решения этой задачи и оценки, характеризующие скорость сходимости алгоритмов построения ее решения [1–7; 31–34].

7. Рассмотрены модельные примеры, иллюстрирующие применение полученных результатов и подтверждающие возможность их применений для решения конкретных задач [7; 31–34].

Перечисленные результаты взаимно дополняют друг друга в рамках используемых регуляризаций.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертационная работа является теоретической. Ее результаты могут быть использованы при решении широкого круга задач естествознания, техники, экономики, социологии, связанных с анализом периодических краевых задач для многомерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты диссертационного исследования могут быть полезны при чтении спецкурсов по качественной теории дифференциальных уравнений для студентов и магистрантов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях, соответствующих п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Лаптинский, В. Н. Анализ периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати (левосторонняя регуляризация) / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Весн. Магілеўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2012. – № 1 (39). – С. 4–13.
2. Маковецкая, О. А. Анализ периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати (правосторонняя регуляризация) / О. А. Маковецкая // Весн. Магілеўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2012. – № 2 (40). – С. 35–45.
3. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Тр. ИСА РАН. – 2013. – Т. 63. – № 2. – С. 90–98.
4. Маковецкая, О. А. Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 44–50.
5. Лаптинский, В. Н. Анализ периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Весн. Магілеўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2016. – № 1 (47). – С. 14–23.
6. Лаптинский, В. Н. Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 7. – С. 937–946.
7. Маковецкая, О. А. К построению и структурным свойствам решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / О. А. Маковецкая // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2022. – Т. 12, № 2. – С. 34–55.

Материалы конференций

8. Маковецкая, О. А. Алгоритм с неявной вычислительной схемой построения решения периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Международная математическая конференция «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: С. Г. Красовский. – Минск, 2015. – Ч. 1 – С. 78–79.

9. Маковецкая, О. А. Алгоритм с явной вычислительной схемой построения решения периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: С. Г. Красовский. – Минск, 2016. – Ч. 2. – С. 40–41.

10. Маковецкая, О. А. О периодической краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова с параметром / О. А. Маковецкая // Аналитические методы анализа дифференциальных уравнений : материалы Междунар. науч. семинара, Минск, 17–21 сент. 2018 г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: С. В. Рогозин. – Минск, 2018. – С. 56.

11. Маковецкая, О. А. О периодической краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова – Риккати с параметром / О. А. Маковецкая // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнения (Еругинские чтения – 2018) : материалы Междунар. науч. конф., Гродно, 15–18 мая 2018 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: А. К. Деменчук [и др.]. – Минск, 2018. – Ч. 1. – С. 83–84.

12. Маковецкая, О. А. К разрешимости периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати с параметром / О. А. Маковецкая // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии – 2019 : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 25–26 апр. 2019 г. / Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев, 2019. – С. 525–526.

13. Маковецкая, О. А. К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати с параметром / О. А. Маковецкая // XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2019) : материалы Междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: А. К. Деменчук [и др.]. – Минск, 2019. – Ч. 1. – С. 83–84.

14. Маковецкая, О. А. К периодической краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова – Риккати с параметром / О. А. Маковецкая // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 23–24 апр. 2020 г. / Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев, 2020. – С. 495–496.

15. Маковецкая, О. А. К анализу периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 22–23 апр. 2021 г. / Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев, 2021. – С. 390–391.

16. Маковецкая, О. А. Регуляризация периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Актуальные проблемы науки и техники : материалы I Междунар. науч.-техн. конф., Сарапул, май 2021 г. / УИР ИжГТУ им. М. Т. Калашникова; редкол. : Г. В. Миловзоров [и др.]. – Ижевск, 2021. – С. 16–20.

17. Маковецкая, О. А. Анализ периодической краевой задачи для

обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / О. А. Маковецкая // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 1–4 июня 2021 г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред. С. Г. Красовский. – Минск, 2021. – С. 101–103.

18. Маковецкая, О. А. К периодической краевой задаче для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / О. А. Маковецкая // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-тех. конф., Могилев, 21–22 апреля 2022 г. / Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев, 2022. – С. 407–408.

19. Маковецкая, О. А. Анализ периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати (правосторонняя регуляризация) / О. А. Маковецкая // Актуальные проблемы науки и техники : матер. II Междунар. науч.-техн. конф., Сарапул, май 2022 г. / УИР ИжГТУ им. М. Т. Калашникова; редкол. : Г. В. Миловзоров [и др.]. – Ижевск, 2022. – С. 86–90.

20. Маковецкая, О. А. К анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати с параметром / О. А. Маковецкая // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2022) : материалы Междунар. науч. конф., Новополоцк, 31 мая–03 июня 2022 г. : в 2 ч. / Полоцкий гос. ун-т; ред. В. В. Амелькин [и др.]. – Новополоцк, 2022. – Ч. 1. – С. 63–65.

21. Маковецкая, О. А. Регуляризация периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / О. А. Маковецкая // Теория управления и математическое моделирование : материалы Всерос. конф. с междунар. участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 13–17 июня 2022 г. / ФГБОУ ВО «Удмуртский гос. ун-т»; редкол. : А. С. Банников [и др.]. – Ижевск, 2022. – С. 82–85.

22. Маковецкая, О. А. О периодических решениях обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / О. А. Маковецкая // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 20–21 апреля 2023 г. / Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев, 2023. – С. 433–434.

23. Маковецкая, О. А. Периодическая краевая задача для матричного уравнения Ляпунова – Риккати с параметром / О. А. Маковецкая // XXI Международная научная конференция по дифференциальным уравнения (Еругинские чтения – 2023) : материалы Междунар. науч. конф., Могилев, 23–25 мая 2023 г. : в 2 ч. / Белорус.-Рос. ун-т; редкол. В. В. Амелькин [и др.]. – Могилев, 2023. – Ч. 1. – С. 83–85.

Тезисы докладов

24. Маковецкая, О. А. О периодической краевой задаче матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Международная

математическая конференция «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» : Междунар. науч. конф., Минск, 7–10 дек. 2010 г. : тез. докл. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: С. Г. Красовский [и др.].– Минск, 2010. – С. 66–67.

25. Маковецкая, О. А. Об одном алгоритме построения решения периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Еругинские чтения – 2011 : XIV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Новополоцк, 12–14 мая 2011 г. : тез. докл. / Полоцкий гос. ун-т ; редкол.: И. В. Гайшун [и др.]. – Новополоцк, 2011. – С. 56–57.

26. Лаптинский, В. Н. Об одном алгоритме построения периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : Междунар. конф., Минск, 12–17 сент. 2011 г. : тез. докл. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: С. В. Рогозин. – Минск, 2011. – С.90–91.

27. Лаптинский, В. Н. О периодической краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Третья Международная научная конференция «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» : Междунар. науч. конф., Брест, 17–22 сент. 2012 г. : тез. докл. / Брестский гос. ун-т ; ред.: В. И. Корзюк [и др.]. – Брест, 2012. – С. 67.

28. Маковецкая, О. А. Об одном алгоритме построения решения периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // XI Белорусская математическая конференция : Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 нояб. 2012 г. : тез. докл. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: С. Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2012. – Ч. 2. – С. 44–45.

29. Маковецкая, О. А. Разрешимость и структурные свойства решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Еругинские чтения – 2014 : XVI Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. : тез. докл. : в 2 ч. / Полоцкий гос. ун-т ; редкол.: И. В. Гайшун [и др.]. – Новополоцк, 2014. – Ч. 1. – С. 68–69.

30. Маковецкая, О. А. О периодической краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова – Риккати с параметром / О. А. Маковецкая // Еругинские чтения – 2017 : XVII Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Минск, 16–20 мая 2017 г. : тез. докл. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: С. Г. Красовский. – Минск, 2017. – Ч. 1. – С. 53–54.

Другие публикации

31. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати (левосторонняя регуляризация) / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая. – Могилёв, 2011. – 56 с. – (Препр. / НАН Беларуси, Ин-т технологии металлов; № 27).

32. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати (правосторонняя регуляризация) / В. Н. Лаптинская, О. А. Маковецкая. – Могилёв, 2011. – 51 с. – (Препр. / НАН Беларуси, Ин-т технологии металлов; № 28).

33. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати (двусторонняя регуляризация) / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая. – Могилёв, 2012. – 49 с. – (Препр. / НАН Беларуси, Ин-т технологии металлов; № 31).

34. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ и структурные свойства решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати (двусторонняя регуляризация) / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая. – Могилёв, 2013. – 55 с. – (Препр. / НАН Беларуси, Ин-т технологии металлов; № 33).

РЭЗЮМЭ

Макавецкая Вольга Аляксандраўна

Перыядычная краявая задача
для абагульнення матрычнага дыферэнцыяльнага раўнання Рыкаці

Ключавыя словы: перыядычная краявая задача, мнагамерная сістэма, існаванне і адзінасць рашэння, алгарытм, збежнасць

Мэтай працы з'яўляецца вывучэнне вырашальнасці і пабудова рашэнняў (на аснове канструктыўных метадаў) перыядычнай краявой задачы для абагульнення матрычнага дыферэнцыяльнага раўнання Рыкаці . Асноўныя задачы: атрыманне з дапамогай розных рэгулярызацый (лева- і правабаковай, а таксама двухбаковай) канструктыўных дастатковых умоў існавання і адзінасці рашэння, распрацоўка алгарытмаў яго адшукання і атрыманне ацэнак абсягу лакалізацыі.

Метады даследавання. Даследаванні праводзяцца з выкарыстаннем сучасных метадаў канструктыўнага аналізу краявых задач для мнагамерных сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў, а таксама метадаў тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, класічнага і функцыянальнага аналізу.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыйнай рабоце атрыманы наступныя новыя вынікі:

− развіта методыка рэдукцыі перыядычнай краявой задачы для матрычнага дыферэнцыяльнага раўнання, якое ўяўляе сабой абагульненне матрычнага раўнання Рыкаці да эквівалентных інтэгральных задач;

− распрацаваны алгарытмы пабудовы набліжаных рашэнняў названай задачы і вывучана іх аналітычная структура, якая вызначаецца выкарыстоўванымі рэгулярызатарамі і адпаведнымі вылічальнымі схемамі;

− дадзены канструктыўныя дастатковыя ўмовы адназначнай вырашальнасці задачы і апрыёрныя ацэнкі абсягу лакалізацыі рашэння. Гэтыя вынікі атрыманы яўна: у тэрмінах задачы.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Дысертацыйная работа з'яўляецца тэарэтычнай. Яе вынікі могуць быць скарыстаны пры рашэнні шырокага круга задач прыродазнаўства, тэхнікі, эканомікі, сацыялогіі, звязаных з аналізам перыядычных краявых задач для мнагамерных сістэм звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў.

Вынікі дысертацыйнага даследавання могуць быць карысныя пры чытанні спецкурсаў па якаснай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў для студэнтаў і магістрантаў.

Вобласць ужывання: якасная тэорыя краявых задач для нелінейных сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў.

РЕЗЮМЕ

Маковецкая Ольга Александровна

Периодическая краевая задача
для обобщения матричного дифференциального уравнения Риккати

Ключевые слова: периодическая краевая задача, многомерная система, существование и единственность решения, алгоритм, сходимость

Целью работы является изучение разрешимости и построение решений (на основе конструктивных методов) периодической краевой задачи для обобщения матричного дифференциального уравнения Риккати. Основные задачи: получение с помощью различных регуляризаций (лево- и правосторонней, а также двусторонней) конструктивных достаточных условий существования и единственности решения, разработка алгоритмов его отыскания и получение оценок области локализации.

Методы исследования. Исследования проводятся с использованием современных методов конструктивного анализа краевых задач для многомерных систем дифференциальных уравнений, а также методов теории дифференциальных уравнений, классического и функционального анализа.

Полученные результаты и их новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

− развита методика редукции периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения, представляющего собой обобщение матричного уравнения Риккати к эквивалентным интегральным задачам;

− разработаны алгоритмы построения приближённых решений указанной задачи и изучена их аналитическая структура, определяемая используемыми регуляризаторами и соответствующими вычислительными схемами;

− даны конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости задачи и априорные оценки области локализации решения. Эти результаты получены явно: в терминах задачи.

Рекомендации по использованию. Диссертационная работа является теоретической. Ее результаты могут быть использованы при решении широкого круга задач естествознания, техники, экономики, социологии, связанных с анализом периодических краевых задач для многомерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты диссертационного исследования могут быть полезны при чтении спецкурсов по качественной теории дифференциальных уравнений для студентов и магистрантов.

Область применения: качественная теория краевых задач для нелинейных систем дифференциальных уравнений.

SUMMARY

Makovetskaya Olga

Periodic boundary value problem for generalization of the Riccati matrix differential equation

Key words: periodic boundary value problem, multidimensional system, existence and uniqueness of solution, algorithm, convergence

Objective is to study the solvability and construct solutions (based on constructive methods) of a periodic boundary value problem for generalization of the Riccati matrix differential equation. The main tasks: using various regularizations (left- and right-sided, as well as two-sided) to obtain constructive sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution, to develop algorithms for finding it and to obtain estimates of the localization area.

Research methods. Research is carried out using modern methods of constructive analysis of boundary value problems for multidimensional systems of differential equations, as well as methods of the theory of differential equations, classical and functional analysis.

The results obtained and their novelty. The following new results were obtained in the dissertation:

- a method for reducing a periodic boundary value problem for a matrix differential equation, which is a generalization of the matrix Riccati equation to equivalent integral problems, has been developed;
- algorithms for constructing approximate solutions to this problem have been developed and their analytical structure, determined by the regularizators used and the corresponding computational schemes, has been studied;
- constructive sufficient conditions for the unique solvability of the problem and a priori estimates for the localization region of the solution are given. These results are obtained explicitly: in terms of the problem.

Recommendations for use. The dissertation work is theoretical. Its results can be used to solve a wide range of problems in natural science, technology, economics, and sociology related to the analysis of periodic boundary value problems for multidimensional systems of ordinary differential equations.

The results of the dissertation research can be useful when teaching special courses on the qualitative theory of differential equations for undergraduates and graduate students.

Application area: qualitative theory of boundary value problems for nonlinear systems of differential equations.