Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.925

БЕЛЬСКИЙ
Вадим Алексеевич

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ С ОДИНАКОВЫМИ ОТРАЖАЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

Гродно, 2015

Работа выполнена в учреждении образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Научный руководитель:

Мироненко Владимир Иванович,
кандидат физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры дифференциальных уравнений
и теории функций учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Официальные оппоненты:

Садовский Антон Павлович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры дифференциальных уравнений
и системного анализа
Белорусского государственного университета;

Деменчук Александр Константинович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник
отдела дифференциальных уравнений
государственного научного учреждения
«Институт математики Национальной академии наук Беларуси»

Оппонирующая организация:

Учреждение образования
«**Могилёвский государственный университет
имени А.А. Кулешова**»

Защита состоится 04.12.2015 в 12.00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 218

Телефон ученого секретаря: (+375 152) 74 43 76; (+375 152) 73 19 26

E-mail: v.a.pronko@gmail.com; n.nech@grsu.by

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Автореферат разослан 03.11.2015

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций К 02.14.02 В.А. Пронько

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению свойств решений дифференциальных уравнений, в частности, периодических решений. Начиная с основополагающих трудов А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова, вопросы, связанные с существованием периодических решений, их количеством, начальными данными, а также устойчивостью этих решений, занимают одно из важнейших мест в теории дифференциальных уравнений.

Для изучения этих вопросов в диссертации применяется теория отражающей функции, разработанная В. И. Мироненко. Знание отражающей функции дифференциальной системы позволяет найти в явном виде отображение за период (отображение Пуанкаре) и, значит, найти начальные данные всех периодических решений даже неинтегрируемой в квадратурах системы. Если две периодические системы имеют одну и ту же отражающую функцию, то, согласно теории отражающей функции, они имеют одно и то же отображение за период, а, значит, количество периодических решений, начальные данные этих решений и характер их устойчивости у таких систем совпадают. Непериодические системы с одинаковой отражающей функцией имеют один и тот же оператор сдвига вдоль решений на симметричном промежутке, что позволяет использовать теорию отражающей функции при решении краевых задач.

Эта теория используется нами для построения классов полиномиальных дифференциальных уравнений первого порядка и квадратичных дифференциальных систем с одинаковой отражающей функцией. В диссертации развивается метод возмущений дифференциальных систем, не меняющих отражающую функцию, изложенный в работах В. И. Мироненко и В. В. Мироненко.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Настоящая диссертационная работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и теории функций учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» в соответствии с темой ГБ 11-05 «Симметрии в дифференциальных системах и аппроксимационные свойства их решений», утвержденной Научно-техническим советом ГГУ им. Ф. Скорины (№ госрегистрации 20112329). Срок выполнения 2011–2015 гг.

Цель и задачи исследования

Целью настоящей работы является разработка способов исследования полиномиальных дифференциальных уравнений и систем на основании установления их эквивалентности другим системам в смысле совпадения отражающих функций. Чтобы достичь поставленной цели, решались следующие задачи:

– определить условия, при которых заданное уравнение Абеля (уравнение Риккати) допускает полиномиальное возмущение, сохраняющее отражающую функцию;

– исследовать структуру классов эквивалентных дифференциальных полиномиальных уравнений, получаемых возмущением исходного уравнения при помощи полиномиальных возмущений;

– найти условия, при которых квадратичная дифференциальная система второго порядка эквивалентна треугольной стационарной системе.

Научная новизна

Все результаты данной диссертации являются новыми.

Получены необходимые условия совпадения отражающих функций у двух уравнений Риккати.

Получены необходимые условия существования для заданного уравнения Риккати (а также Абеля), эквивалентного ему уравнения с разделяющимися переменными, и указан способ его построения.

Получены необходимые, а также достаточные условия существования для заданного уравнения Абеля полиномиального возмущения, сохраняющего отражающую функцию.

Получены необходимые и достаточные условия совпадения отражающих функций у полиномиального уравнения $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + \ldots + a_n(t)x^n$ и некоторого линейного уравнения.

Разработан способ описания структуры классов эквивалентности, построенных при помощи полиномиальных возмущений дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью.

Получены необходимые условия совпадения отражающих функций у квадратичной дифференциальной системы второго порядка и квадратичной системы, одно из уравнений которой представляет собой уравнение Риккати.

Разработан алгоритм, позволяющий установить эквивалентность квадратичной нестационарной дифференциальной системы и треугольной стационарной системы.

Положения, выносимые на защиту

1. Необходимые, а также достаточные условия эквивалентности в смысле совпадения отражающих функций двух уравнений Абеля (двух уравнений Риккати). В частности, условия эквивалентности указанных уравнений уравнениям такого же вида с разделяющимися переменными.

2. Способ описания классов дифференциальных полиномиальных уравнений с одинаковой отражающей функцией, получаемых полиномиальными возмущениями исходных уравнений. Доказательство того, что для двух эквивалентных в смысле совпадения отражающих функций полиномиальных уравне-

ний с разными степенями существует линейное уравнение, эквивалентное им обоим.

3. Алгоритм, позволяющий установить совпадение отражающих функций у квадратичной дифференциальной системы второго порядка и стационарной треугольной системы.

Личный вклад соискателя ученой степени

Все результаты диссертации получены соискателем лично.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертационной работы докладывались на:

Международной математической конференции «Еругинские чтения – XI» (Гомель, 2006);

X Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2007);

III международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы научных исследований – 2007» (Днепропетровск, 2007);

IV международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы научных исследований – 2008» (Прага, 2008);

Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 2008);

X Белорусской математической конференции (Минск, 2008);

XIII Международной математической конференции «Еругинские чтения – 2009» (Пинск, 2009);

Международной математической конференции «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 2010);

XIV Международной математической конференции «Еругинские чтения – 2011» (Новополоцк, 2011).

Опубликование результатов диссертации

Результаты диссертации опубликованы в 17 научных работах, в том числе – 1 монографии, 7 статьях в научных журналах, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (5,7 авт.л.), 3 статьях в сборниках материалов научных конференций и 6 тезисах докладов международных научных конференций. Общее количество опубликованных материалов составляет 17,39 авт.л.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, основной части, которая подразделяется на четыре главы, заключения и библиографического списка на 8 страницах, включающего 101 наименование, в том числе 17 – публикации автора по теме диссертации.

Объем диссертации – 128 страниц.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В **первой главе** «Аналитический обзор литературы и основные методы исследования» приведен обзор работ по теме диссертации. Описан метод отражающей функции и его применение при поиске периодических решений и решении краевых задач. Приведены основные результаты диссертационного исследования.

Во **второй главе** «Классы уравнений, эквивалентных заданным уравнениям Риккати и Абеля» рассмотрены полиномиальные возмущения дифференциальных уравнений Риккати и Абеля, сохраняющие ОФ (а значит, сохраняющие отображение за период).

Нумерация теорем и лемм в автореферате такая же, как и в диссертации.

В **разделах 2.1, 2.2** исследовано неавтономное уравнение Риккати

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 . \tag{1}$$

Получены необходимые условия совпадения отражающих функций у двух уравнений Риккати.

Теорема 2.1 [1, с. 23–25; 8]. *Пусть ОФ уравнений (1) и уравнения*

$$\dot{x} = A(t) + B(t)x + C(t)x^2 \tag{2}$$

совпадают. Тогда: 1) правые части уравнений совпадают при $t = 0$, *2)* $\Delta(t) := 4[A(t) - a(t)][C(t) - c(t)] - [B(t) - b(t)]^2$ *есть четная функция.*

Теорема 2.2 [1, с. 25–27; 8]. *Для любого уравнения (1) в некоторой окрестности прямой* $t = 0$ *плоскости* tOx *существует эквивалентное ему уравнение (2), в котором нечетные части* $A_{н}(t), B_{н}(t), C_{н}(t)$ *функций* $A(t), B(t), C(t)$ *могут быть выбраны произвольным образом.*

Теорема 2.2 дает возможность при поиске уравнения Риккати, эквивалентного исходному, заранее задать нечетные части коэффициентов искомого уравнения необходимым нам образом. При этом четные части коэффициентов определятся однозначно на основании заданных нечетных.

Следствие. *Для любого уравнения (1) в некоторой окрестности прямой* $t = 0$ *можно построить уравнение (2) с четной по* t *правой частью, эквивалентное уравнению (1).*

В разделе 2.2 установлены условия, при которых уравнение Риккати имеет такую же отражающую функцию, как и некоторое уравнение с разделяющимися переменными

$$\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2), \xi_i = const, \tag{3}$$

где $A(t)$ – некоторая дифференцируемая функция и указан способ его построения. Аналогичная задача решается нами впоследствии и для уравнения Абеля.

Оказывается, что функцию $A(t)$ можно выбрать четной, так как добавка к ней любой нечетной функции не меняет отражающей функции уравнения.

В дальнейшем под символом p_0 мы будем подразумевать значение функции $p(t)$ при $t = 0$, а под символами $p_ч, p_н$ – четную или нечетную части функции $p(t)$ соответственно.

Теоремы 2.5 – 2.6 [1, с. 36–38; 3; 8]. 1) *Пусть уравнение (1), для которого* $4a_0c_0 - b_0^2 \neq 0$*, эквивалентно какому-либо уравнению (3). Тогда уравнение (3) может быть записано в виде*

$$\dot{x} = \frac{2a_0c_ч + 2c_0a_ч - b_0b_ч}{4a_0c_0 - b_0^2}(a_0 + b_0x + c_0x^2).$$

2) *Пусть уравнение (1), в котором хотя бы одно из чисел* a_0, b_0, c_0 *отлично от нуля и* $4a_0c_0 - b_0^2 = 0$*, эквивалентно какому-либо уравнению (3). Тогда уравнение (3) может быть записано в виде* $\dot{x} = A(t)(a_0 + b_0x + c_0x^2)$*, где функция* $A(t)$ *определяется по одной из формул:*

1) $\int\limits_0^t A(\tau)d\tau = \frac{d}{dt}(\frac{1}{c_0}\exp(-\int\limits_0^t b_н d\tau)\int\limits_0^t c_ч \exp(\int\limits_0^\tau b_н d\sigma)d\tau)$, *если* $a_0 = 0$;

2) $\int\limits_0^t A(\tau)d\tau = \frac{d}{dt}(\frac{1}{a_0}\exp(\int\limits_0^t (b_н - \frac{b_0}{a_0}a_н)d\tau)\int\limits_0^t a_ч \exp(-\int\limits_0^\tau (b_н - \frac{b_0}{a_0}a_н)d\sigma)d\tau)$,

если $a_0 \neq 0$.

Приведенные выше теоремы 2.5 – 2.6 являются необходимыми условиями эквивалентности уравнений (1) и (3). Для проверки достаточности необходимо решить построенное уравнение с разделяющимися переменными (3), найти его отражающую функцию и проверить, выполняется ли для построенного уравнения (3) основное соотношение для отражающей функции.

В конце раздела 2.2 рассмотрен также случай, когда $a_0 = b_0 = c_0 = 0$.

В **разделе 2.3** приведен ряд примеров, показывающих, как полученные нами теоремы могут быть применены для поиска периодических решений уравнения Риккати.

В работах В. И. Мироненко и В. В.Мироненко показано, что если непрерывно дифференцируемые вектор-функции $\Delta_1(t,x),\ldots,\Delta_k(t,x)$ являются решениями дифференциальной системы

$$\frac{\partial\Delta(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial\Delta(t,x)}{\partial x}X(t,x)-\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta(t,x)=0, \tag{4}$$

то все возмущенные системы вида

$$\dot{x}=X(t,x)+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)\Delta_i(t,x), \tag{5}$$

где $\alpha_i(t)$, $i=\overline{0,k}$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, имеют такую же отражающую функцию, как и система $\dot{x}=X(t,x)$. В остальной части диссертации мы широко используем этот результат.

В **разделах 2.4** – **2.7** рассмотрено уравнение Абеля

$$\dot{x}=a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3, \tag{6}$$

для которого мы строим другие уравнения Абеля вида

$$\dot{x}=a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3+\alpha_1(t)\Delta_1(t,x)+\ldots+\alpha_n(t)\Delta_n(t,x),$$

где $\Delta_1(t,x),\ldots,\Delta_n(t,x)$ – полиномиальные функции вида

$$\Delta(t,x)=r_0(t)+r_1(t)x+r_2(t)x^2+r_3(t)x^3, \tag{7}$$

удовлетворяющие уравнению (4).

Получены как необходимые, так и достаточные условия существования полиномиального возмущения, сохраняющего отражающую функцию исследуемого уравнения (6).

Теорема 2.7 [1, с. 50–51; 8]. *Для того чтобы для уравнения Абеля (6), в котором* $a_3(t)\neq 0$*, существовала хотя бы одна полиномиальная функция* $\Delta(t,x)$ *вида (7), удовлетворяющая уравнению (4), тождественно не равная нулю, необходимо, чтобы функция* $\varphi(t):=27a_0a_3^2+2a_2^3-9a_1a_2a_3-9(\dot{a}_3a_2-a_3\dot{a}_2)$ *удовлетворяла соотношению*

$$
\begin{aligned}
&3a_3\varphi\ddot{\varphi}+9\varphi(\dot{\varphi}\,\dot{a}_3-\varphi\,\ddot{a}_3-\varphi\,\dot{a}_3a_1-\varphi\,a_3\dot{a}_1)+\\
&+6\varphi(\dot{\varphi}\,a_1a_3+\varphi\,a_2\dot{a}_2)-5a_3\dot{\varphi}^2-2a_2^2\varphi\dot{\varphi}=0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

В дальнейшем в разделе 2.4 показано, что это условие является также и достаточным.

Теорема 2.8 [1, с. 51–52; 8]. *Пусть коэффициенты уравнения (6) удовлетворяют тождеству (8), причем* $a_3(t)\neq 0$, *а*

$$\varphi(t)\equiv 27a_0a_3^2+2a_2^3-9a_1a_2a_3-9(\dot{a}_3a_2-a_3\dot{a}_2)$$

не обращается в нуль. Тогда для уравнения (6) существует единственное с точностью до постоянного множителя возмущение $\Delta(t,x)$ *вида (7), причем коэффициенты этого* $\Delta(t,x)$ *находятся по формулам* $r_0(t)=\frac{1}{9}[3\varphi(3a_3a_0+\dot{a}_2)-a_2\dot{\varphi}]\varphi^{-\frac{5}{3}}$,
$r_1(t)=\frac{1}{3}[3\varphi(a_3a_1+\dot{a}_3)-a_3\dot{\varphi}]\varphi^{-\frac{5}{3}}, r_2(t)=a_3a_2\varphi^{-\frac{2}{3}}, r_3(t)=a_3^2\varphi^{-\frac{2}{3}}$.

Теорема 2.9 [1, с. 53–54; 4]. *Пусть* $\varphi(t)\equiv 0$. *Тогда для уравнения (6) существуют две линейно независимые функции* $\Delta(t,x)$ *вида (7), удовлетворяющие уравнению (4).*

Полиномиальных функций вида (7), но степени, отличной от третьей, для уравнения Абеля не существует.

Теорема 2.10 [1, с. 56; 8]. *Пусть для уравнения (6) с непрерывно дифференцируемыми* 2ω*-периодическими коэффициентами выполняется неравенство* $a_{3_ч}(t)<0$ *при* $t\in[0,\omega]$. *Тогда уравнение (6) имеет хотя бы одно* 2ω*-периодическое решение.*

В **разделе 2.6** решена задача о необходимых и достаточных условиях, при которых для исследуемого уравнения (6) может быть построено эквивалентное ему уравнение Абеля с разделяющимися переменными вида

$$\dot{x}=A(t)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3), \xi_i=const, \tag{9}$$

где $A(t)$ – непрерывная функция. Результаты этих исследований содержатся в двух следующих теоремах.

Обозначим $I(t):=\int A(t)dt, m_0:=\frac{2(a_{20}^2-3a_{10}a_{30})}{3a_{30}}$.

Теорема 2.13 [1, с. 68–70; 6]. *Пусть коэффициенты уравнения (6) удовлетворяют условиям:* $a_{30}\neq 0, \varphi_0=0$, $m_0\neq 0$ *и, кроме того,* $a_{30}a_2=a_{20}a_3$,
$2a_{30}(a_{20}^2-3a_{10}a_{30})a_0=(a_{00}a_{20}^2+3a_{00}a_{10}a_{20}-a_{20}a_{10}^2)a_3+a_{30}(a_{10}a_{20}-9a_{00}a_{30})a_1$,

$$a_{20}^2 a_3 - 3a_{30}^2 a_1 + a_{20}^2 \overline{a}_3 - 3a_{30}^2 \overline{a}_1 = \frac{3a_{30}^2}{2}\left(\frac{a_{10}\overline{a}_3 - a_{30}\overline{a}_1}{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}{a_{10}\overline{a}_3 - a_{30}\overline{a}_1}\right),$$

где $\overline{a}_i \equiv a_i(-t)$. *Тогда для уравнения (6) существует эквивалентное ему уравнение (9), которое может быть записано в виде*

$$\dot{x} = \frac{a_{20}^2(a_3 + \overline{a}_3) - 3a_{30}^2(a_1 + \overline{a}_1)}{3a_{30}^2 m_0}(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3).$$

Теорема 2.14 [1, с. 71–72; 6]. *Пусть коэффициенты уравнения (6) удовлетворяют условиям:* $a_{30} \neq 0, \varphi_0 = 0$, $m_0 = 0$, *а также,* $a_{30}a_2 = a_{20}a_3$, $a_{30}(a_1 + \overline{a}_1) = a_{10}(a_3 + \overline{a}_3)$,
$3a_{30}^2(a_0 - \overline{a}_0) = (3a_{00}a_{30} - a_{10}a_{20})(a_3 - \overline{a}_3) + a_{20}a_{30}(a_1 - \overline{a}_1)$,
$a_{30}(a_0 + \overline{a}_0) = a_{00}(a_3 + \overline{a}_3)$. *Тогда для уравнения (6) существует эквивалентное ему уравнение (9), причем функция* $A(t)$ *определяется соотношением*
$2a_{30}A(t) = a_3 + \overline{a}_3 - 2\psi(t)I(t)$, *где* $\psi(t) := a_{30}a_1 - a_{10}a_3 - (a_{30}\overline{a}_1 - a_{10}\overline{a}_3)$.

В **разделе 2.7** получены необходимые и достаточные условия эквивалентности уравнения Абеля и линейного уравнения.

Теорема 2.15 [1 с. 75–78]. *Пусть для коэффициентов уравнения (6) выполенены условия:* $a_3(t)$ *имеет только изолированные нули, и функция* $\lim\limits_{t\to\tau}\frac{a_3(\tau)}{\overline{a}_3(\tau)}$ *доопределяется до непрерывной отрицательной функции,*

$$\lim_{t\to 0}\frac{a_3(t)}{\overline{a}_3(t)} = -1,\ \lim_{t\to 0}\frac{(-a_3/\overline{a}_3)^{\frac{1}{2}}a_2\overline{a}_3 - \overline{a}_2 a_3}{a_3\overline{a}_3} = 0,$$

$$2(a_2^2\overline{a}_3 + \overline{a}_2^2 a_3) - 6a_3\overline{a}_3(a_1 + \overline{a}_1) - 3(\dot{\overline{a}}_3 a_3 + \dot{a}_3\overline{a}_3) = 0,$$

$$2a_3(-a_3/\overline{a}_3)^{\frac{1}{2}}[27a_0\overline{a}_3^2 - 9\overline{a}_1\overline{a}_2\overline{a}_3 + 2\overline{a}_2^3 - 9(\dot{\overline{a}}_3\overline{a}_2 - \overline{a}_3\dot{\overline{a}}_2)] - 18a_3\overline{a}_3(\dot{a}_2 + \overline{a}_1 a_2) +$$
$$+ 9a_2(\dot{a}_3\overline{a}_3 - \overline{a}_3\dot{\overline{a}}_3) + 2(a_3\overline{a}_2^3 + 3\overline{a}_2^2 a_3 a_2 - 27a_3^2\overline{a}_3 a_0) = 0.$$

Тогда для уравнения (6) существует эквивалентное ему линейное уравнение, которое может быть записано в виде

$$\dot{x} = -\frac{\overline{a}_3\dot{a}_3 + \dot{\overline{a}}_3 a_3}{4a_3\overline{a}_3}x + \frac{2a_3(-a_3/\overline{a}_3)^{\frac{1}{2}}(\overline{a}_3\dot{\overline{a}}_2 - \overline{a}_2\dot{\overline{a}}_3) + a_2(\dot{a}_3\overline{a}_3 - a_3\dot{\overline{a}}_3) - 2a_3\overline{a}_3\dot{a}_2}{12a_3^2\overline{a}_3}.$$

В **третьей главе** «Классы эквивалентности уравнений с полиномиальными правыми частями» рассмотрены полиномиальные возмущения дифференциального уравнения

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + \ldots + a_n(t)x^n, \tag{10}$$

сохраняющие отражающую функцию. Для этого мы используем полиномиальные функции

$$\Delta(t,x) = r_0(t) + r_1(t)x + \ldots + r_m(t)x^m \tag{11}$$

и строим класс уравнений, эквивалентных исходному уравнению (10)

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + \ldots + a_n(t)x^n + \sum_i \alpha_i(t)\Delta_i(t,x).$$

В **разделах 3.1, 3.2** изучен вопрос о количестве линейно независимых полиномиальных $\Delta(t,x)$, сохраняющих отражающую функцию заданного уравнения (10). Показано, что для некоторых уравнений вида (10) может существовать бесконечно много таких $\Delta(t,x)$ (причем сколь угодно большой степени), три, два или одно. Для некоторых уравнений таких полиномиальных $\Delta(t,x)$ не существует вовсе.

Лемма 3.1 [1, с. 82–83; 5]. *Пусть многочлен в правой части уравнения (10) имеет степень $n \geq 2$, причем множество нулей коэффициента $a_n(t)$ нигде не плотно на **R**. Тогда, если существует многочлен вида (11), удовлетворяющий уравнению (4), то $m = n$.*

Таким образом, для полиномиального дифференциального уравнения степени выше первой может существовать полиномиальное $\Delta(t,x)$ с указанным свойством только такой степени, как и у самого уравнения. Для линейного уравнения могут существовать полиномиальные $\Delta(t,x)$ сколь угодно большой степени.

Теорема 3.1 [1, с. 84–86; 5]. *Дифференциальное уравнение (10) эквивалентно некоторому линейному уравнению $\dot{x} = b_0(t) + b_1(t)x$ тогда и только тогда, когда это уравнение (10) можно записать в виде*

$$\dot{x} = b_0(t) + b_1(t)x + e^{I(t)}(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \ldots + \alpha_n u^n),$$

*где $b_0(t), b_1(t), \alpha_k(t), k = \overline{0,n}$ – непрерывные на **R** функции, причем $\alpha_k(t)$ – нечетные; $u = u(t,x)$ – первый интеграл линейного уравнения.*

В **разделе 3.3** для описания множества возмущенных полиномиальных уравнений нами использована специальная терминология, позволяющая наглядно представить возникающие здесь взаимоотношения между уравнениями.

Определение 3.2. *Совокупность уравнений вида*

$$\dot{x} = X(t,x) + \alpha(t)\Delta(t,x),$$

*где функция $\alpha(t)$ пробегает класс непрерывных нечетных функций $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, назовем **тропой**, проходящей через уравнение $\dot{x} = X(t,x)$.*

Определение 3.3. *Совокупность уравнений*

$$\dot{x} = X(t,x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t)\Delta_i(t,x), \ m \geq 2,$$

*где функции $\alpha_i(t)$ пробегают класс непрерывных нечетных функций $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $\Delta_i(t,x)$ – линейно независимые над $\boldsymbol{E}$ полиномиальные решения уравнения (4), будем называть m- **полем, порожденным уравнением** $\dot{x} = X(t,x)$.*

(Через $\boldsymbol{E}$ мы обозначили класс непрерывных четных функций $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$.)

Определение 3.4. *Уравнение, через которое проходит более чем одна тропа, будем называть **перекрестком**.*

Все уравнения тропы или поля имеют одну и ту же ОФ. Из теоремы 3.1 следует, что любое линейное уравнение является перекрестком и порождает ∞ – поле.

Введенная терминология позволила взглянуть на построенные классы эквивалентных уравнений с той точки зрения, что различные уравнения из построенного множества, пусть даже очень похожие внешне, могут занимать в нем качественно различное положение. Такая точка зрения привела к новым результатам.

Теорема 3.2 [1, с. 95; 5]. *Через любой перекресток проходит континуум попарно различных троп.*

Следствие [1, с. 96; 5]. *Пусть $\Delta_i(t,x), i = \overline{1,k}$ – линейно независимые над $\boldsymbol{E}$ полиномиальные решения уравнения (4) для уравнения $\dot{x} = X(t,x)$. Тогда две тропы $\dot{x} = X(t,x) + \alpha(t)\sum_{i=1}^{k} a_i\Delta_i(t,x)$ и $\dot{x} = X(t,x) + \beta(t)\sum_{i=1}^{k} b_i\Delta_i(t,x)$, где $\alpha(t), \beta(t)$ – произвольные непрерывные нечетные функции, $a_i, b_i \in \boldsymbol{R}$, различны тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a} = (a_1, \dots, a_k)$ и $\overline{b} = (b_1, \dots, b_k)$ неколлинеарны.*

Теорема 3.3 [1, с. 93–94; 5]. *Любое уравнение Риккати $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2$ с непрерывными на $\boldsymbol{R}$ коэффициентами (причем $a_2(t)$ не обращается тождественно в нуль), является перекрестком и порождает 3-поле.*

Таким образом, для произвольного уравнения Риккати существует ровно три линейно независимых полиномиальных $\Delta(t,x)$ с указанными свойствами.

В этом разделе мы также изучили вопрос о том, как можно переходить от одного уравнения множества эквивалентности к другому.

Определение 2.5. *Непосредственный переход от одного полиномиального уравнения к другому, ему эквивалентному, с помощью только одного полиномиального* $\Delta(t,x)$ *будем называть* ***шагом***.

Определение 2.6. *Упорядоченную последовательность уравнений* $\dot{x} = X(t,x), \dot{x} = X_1(t,x), \ldots, \dot{x} = X_s(t,x)$, *пройденных по шагам, будем называть* ***путем***, *соединяющим уравнения* $\dot{x} = X(t,x)$ *и* $\dot{x} = X_s(t,x)$.

Для двух заданных уравнений наиболее интересен кратчайший путь от одного уравнения к другому.

Теорема 3.4 [1, с. 98; 5]. *От любого уравнения тропы можно перейти к любому другому уравнению этой же тропы и притом за один шаг.*

Развивая данную теорию, мы пришли к выводу, что если два полиномиальных уравнения разной степени принадлежат одному классу эквивалентности, построенному при помощи полиномиальных возмущений, то в этом классе содержится также линейное уравнение.

Теорема 3.5 [1, с. 99; 5]. *Пусть существует путь, соединяющий уравнение* $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + \ldots + a_n(t)x^n$, *где* $a_n(t) \neq 0$, *с уравнением* $\dot{x} = b_0(t) + b_1(t)x + \ldots + b_m(t)x^m, b_m(t) \neq 0$, *где* $2 \le m < n$. *Тогда этот путь лежит через некоторое линейное уравнение.*

Определение 2.7. *Переход от уравнения (10) к эквивалентному ему уравнению* $\dot{x} = X(t,x) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t)\Delta_i(t,x),\ k \ge 2$ *при помощи двух или более линейно независимых над* ***E*** *полиномиальных функций* $\Delta(t,x)$ *будем называть* ***прыжком***.

В **разделе 3.4** с таких же позиций рассмотрено стационарное полиномиальное уравнение

$$\dot{x} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n := X(x),\ a_i = const, i = \overline{0,n}. \qquad (12)$$

Теорема 3.6 [1, с. 101]. *Для любого автономного уравнения (12) существует содержащая его тропа.*

Однако не всякие автономные уравнения являются перекрестками. Линейные уравнения и уравнения Риккати всегда являются перекрестками. Для уравнения Абеля имеет место следующая теорема:

Теорема 3.7 [1, с. 102]. *Стационарное уравнение Абеля*

$$\dot{x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,\ a_3 \neq 0,$$

является перекрестком тогда и только тогда, когда его коэффициенты связаны соотношением $\varphi_0 := 27a_0 a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1 a_2 a_3 = 0$.

В **четвертой главе** «Полиномиальные возмущения квадратичных систем, сохраняющие отражающую функцию» рассмотрены полиномиальные возмущения квадратичных дифференциальных систем второго порядка, сохраняющие отображение за период. Здесь мы строим классы квадратичных дифференциальных систем, возмущая исходную квадратичную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0(t) + A_1(t)x + A_2(t)y + A_3(t)x^2 + A_4(t)xy + A_5(t)y^2, \\ \dot{y} &= B_0(t) + B_1(t)x + B_2(t)y + B_3(t)x^2 + B_4(t)xy + B_5(t)y^2 \end{aligned} \tag{13}$$

при помощи полиномиальных вектор-функций вида

$$\Delta(t,x,y) = \begin{pmatrix} r_0(t) + r_1(t)x + r_2(t)y + r_3(t)x^2 + r_4(t)xy + r_5(t)y^2 \\ s_0(t) + s_1(t)x + s_2(t)y + s_3(t)x^2 + s_4(t)xy + s_5(t)y^2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

В **разделах 4.1, 4.2** мы показали, что: 1) для квадратичной системы (13) могут существовать полиномиальные возмущения степени выше второй, сохраняющие отражающую функцию системы (в отличие от систем первой размерности, т.е. уравнения Риккати, для которого существуют полиномиальные возмущения только второй степени), 2) число линейно независимых возмущений вида (14), не меняющих отражающую функцию, может быть больше трех (в отличие от уравнения Риккати, для которого их существует ровно три).

Теорема 4.1 [1, с. 113–114]. *Для квадратичной системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x + \varphi^2 a_5 x^2 + \varphi\, a_5 xy + a_5 y^2 \\ \dot{y} &= b_2 y + \varphi^3 a_5 x^2 + \varphi^2 a_5 xy + \varphi\, a_5 y^2 \end{aligned}, \tag{15}$$

где $a_1 = a_1(t), a_5 = a_5(t), b_2 = b_2(t)$ *– произвольные непрерывные на* $\boldsymbol{R}$ *функции,* $\varphi := \varphi_0 \exp(\int_0^t (b_2 - a_1)d\tau$, φ_0 *– произвольная постоянная, существует полиномиальное* $\Delta(t,x,y)$ *третьей степени, сохраняющее отражающую функцию системы, которое может быть записано в виде*

$$\Delta(t,x,y) = \exp(\int_0^t (a_1(\tau) - b_2(\tau))d\tau \begin{pmatrix} -\varphi^3 x^3 + y^3 \\ -\varphi^4 x^3 + \varphi\, y^3 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.3 [1, с. 115–116]. *Пусть* $u(t,x)$ *есть первый интеграл стационарной системы*

$$\dot{x} = X_1(x,y), \quad \dot{y} = X_2(x,y), \tag{16}$$

где $X_1(x,y)$ *и* $X_2(x,y)$ *– дифференцируемые по* x *и по* y *функции, причем не обязательно полиномы.*

Тогда неавтономная система

$$\dot{x} = X_1(x,y)(1+\alpha(t)u^n),$$
$$\dot{y} = X_2(x,y)(1+\alpha(t)u^n),$$

где $\alpha(t)$ *– произвольная непрерывная скалярная нечетная функция, эквивалентна стационарной системе (16).*

Теорема 4.3 показывает, что для любой стационарной системы с полиномиальным первым интегралом существуют полиномиальные возмущения, сохраняющие отражающую функцию, причем сколь угодно большой степени.

Лемма 4.1 [1, с. 117–118]. *Для квадратичной системы (13) может существовать не более 12 линейно независимых полиномиальных функций вида (14), удовлетворяющих уравнению (4).*

Главный объект исследования четвертой главы – класс квадратичных дифференциальных систем второй размерности, эквивалентных треугольной квадратичной системе, т.е. системе, первое уравнение которой не зависит от y, т.е. представляет собой уравнение Риккати $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_3(t)x^2$. А, значит, для любой системы класса эквивалентности, содержащего треугольную систему, нам известен вид первой компоненты отражающей функции.

Для установления условий существования для заданной системы (13) некоторой эквивалентной ей треугольной системы вида

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_3(t)x^2, \\ &\dot{y} = b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)y + b_3(t)x^2 + b_4(t)xy + b_5(t)y^2 \end{aligned} \tag{17}$$

нами решены две взаимосвязанные задачи:

1) установлено, для каких треугольных систем вида (17) существуют полиномиальные $\Delta(t,x,y)$ вида (14), причем такие что $r_2^2 + r_4^2 + r_5^2 \neq 0$;

2) установлен вид правой части квадратичной системы (13), принадлежащей классу эквивалентности, содержащему треугольную систему (17).

Решение этих задач раскрывается в следующей теореме.

Теорема 4.6 [1, с. 129–130; 7]. *Для того чтобы для треугольной квадратичной дифференциальной системы (17) с* $a_3(t)$, *не равной тождественно ну-*

лю, существовало полиномиальное квадратичное $\Delta(t,x,y)$ *вида (14), в котором* $r_2^2+r_4^2+r_5^2\neq 0$, *достаточно, чтобы система (17) имела вид*

$$\begin{aligned}&\dot{x}=a_0(t)+a_1(t)x+a_3(t)x^2,\\&\dot{y}=b_0(t)+b_1(t)x+b_2(t)y+a_3(t)xy.\end{aligned}\tag{18}$$

При этом $\Delta(t,x,y)$ *может быть записано в виде*

$$\Delta(t,x,y)=\begin{pmatrix}r_0(t)+r_1(t)x+r_2(t)y+r_3(t)x^2+r_4(t)xy\\ s_0(t)+s_1(t)x+s_2(t)y+r_3(t)xy+r_4(t)y^2\end{pmatrix},\tag{19}$$

где функции $r_i(t), i=\overline{0,4}, s_j(t), j=\overline{0,2}$ *являются решением линейной дифференциальной системы*

$$\begin{aligned}&\dot{r}_0+a_0r_1+b_0r_2-a_1r_0=0,\\&\dot{r}_1+2a_0r_3+b_0r_4+b_1r_2-2a_3r_0=0,\\&\dot{r}_2+a_0r_4+b_2r_2-a_1r_2=0,\\&\dot{r}_3+b_1r_4-a_3r_1+a_1r_3=0,\\&\dot{r}_4+b_2r_4-a_3r_2=0,\\&\dot{s}_0+a_0s_1+b_0s_2-b_1r_0-b_2s_0=0,\\&\dot{s}_1+b_1s_2+b_0r_3+a_1s_1-b_2s_1-b_1r_1-a_3s_0=0,\\&\dot{s}_2+2b_0r_4+a_0r_3-b_1r_2-a_3r_0=0.\end{aligned}\tag{20}$$

Следствие [1, с. 130–131]. *Для любой треугольной дифференциальной системы вида (18) существует восемь линейно независимых полиномиальных* $\Delta(t,x,y)$ *вида (19), удовлетворяющих уравнению (4), т.е. не меняющих отражающую функцию исходной системы.*

Получено необходимое условие принадлежности исследуемой квадратичной системы классу эквивалентности, в котором находится треугольная дифференциальная система (18).

Теорема 4.7 [1, с. 131–132; 7]. *Пусть квадратичная дифференциальная система (13) может быть записана в виде*

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0(t)+a_1(t)x+a_3(t)x^2\\ b_0(t)+b_1(t)x+b_2(t)y+a_3(t)xy\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{8}\alpha_i(t)\Delta_i(t,x),$$

а поэтому эквивалентна некоторой треугольной системе (18). Тогда для коэффициентов системы (13) справедливы соотношения

$$A_5(t) \equiv 0,\, B_3(t) \equiv 0,\, B_4(t) \equiv A_3(t), B_5(t) \equiv A_4(t),\, A_4(0) = 0,\, A_2(0) = 0,$$

т.е. система (13) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0(t) + A_1(t)x + A_2(t)y + A_3(t)x^2 + A_4(t)xy, \\ \dot{y} &= B_0(t) + B_1(t)x + B_2(t)y + A_3(t)xy + A_4(t)y^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Раздел 4.3 посвящен применению изложенного в работах В. И. Мироненко и В. В. Мироненко алгоритма установления эквивалентности двух дифференциальных систем.

В **разделах 4.4** и **4.5** установлены условия, при которых квадратичная система эквивалентна некоторой стационарной системе. Мы обсуждаем несколько путей решения поставленной задачи и указываем, в каких случаях мы можем разрешить вопрос об эквивалентности до конца. В разделе 4.5 такая же задача об эквивалентности стационарной системе решена для системы (21). Мы предполагаем, что эта система (21), к которой мы хотим придти, возмущая стационарную систему, имеет периодическую по t правую часть. Получены условия, при которых все полиномиальные функции $\Delta_i(t,x), i = \overline{0,8}$ для соответствующей стационарной системы будут периодическими. Благодаря этому мы имеем возможность построить класс периодических систем, эквивалентных стационарной системе.

Теорема 4.11 [1, с. 151; 7]. *Пусть периодическая система (21) с периодом правой части T эквивалентна стационарной системе, для которой имеет место условие $a_1^2 - 4a_0a_3 < 0$. Тогда эта дифференциальная система (21) не имеет периодических решений.*

Задача установления эквивалентности треугольной нестационарной системы и стационарной системы решена нами полностью. В конце раздела 4.5 приводится последовательность шагов, которые необходимо осуществить, чтобы ответить на поставленный вопрос. Эти шаги следующие:

1) Для исходной системы (21) выпишем соответствующую стационарную систему и из соотношения

$$\int_x^{F_1} \frac{d\xi}{a_0 + a_1\xi + a_3\xi^2} = -2t$$

определим первую компоненту F_1 отражающей функции $F=(F_1,F_2)^T$.

2) Вычислим F_2 по формуле

$$F_2=\frac{F_{1t}+F_{1x}(A_0+A_1x+A_2y+A_3x^2+A_4xy)+\overline{A}_0+\overline{A}_1F_1+\overline{A}_3F_1^2}{-(\overline{A}_2+\overline{A}_4F_1)}.$$

3) Подставим F_1 и F_2 в соотношение

$$F_{2t}+F_{2x}(A_0+A_1x+A_2y+A_3x^2+A_4xy)+F_{2y}(B_0+B_1x+B_2y+A_3xy+ \\ +A_4y^2)+\overline{B}_0+\overline{B}_1F_1+\overline{B}_2F_2+\overline{A}_3F_1F_2+\overline{A}_4F_2^2=0.$$

Если полученное при этом соотношение обращается в тождество, то $F=(F_1,F_2)^T$ – отражающая функция исследуемой системы (21). При этом система (21) и соответствующая стационарная система эквивалентны. Если нет, то стационарной системы, эквивалентной исходной системе, не существует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Получены необходимые, а также достаточные условия эквивалентности в смысле совпадения отражающих функций двух уравнений Абеля (двух уравнений Риккати) [1, 2, 4, 8, 9, 10, 12]. В частности, условия эквивалентности указанных уравнений уравнениям такого же вида с разделяющимися переменными [1, 3, 6, 8];

Разработан способ описания классов дифференциальных полиномиальных уравнений с одинаковой отражающей функцией, получаемых полиномиальными возмущениями исходных уравнений. В частности, доказано, что для двух эквивалентных в смысле совпадения отражающих функций полиномиальных уравнений с разными степенями существует линейное уравнение, эквивалентное им обоим [1, 5, 11, 13, 14, 17];

Разработан алгоритм, позволяющий установить совпадение отражающих функций у квадратичной дифференциальной системы второго порядка и некоторой стационарной треугольной системы [1, 7, 8, 15, 16].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации могут быть применены в теории колебаний.

Полученные результаты также могут быть использованы при чтении специальных курсов по качественной теории дифференциальных уравнений.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

1. Бельский, В. А. Полиномиальные дифференциальные уравнения и системы с одинаковыми отражающими функциями : монография / В. А. Бельский. – Гомель : ГГТУ им П.О. Сухого, 2014. – 176 с.

Статьи

2. Бельский, В. А. Уравнения Риккати с одинаковыми отражающими функциями / В. А. Бельский // Известия Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2007. – № 4. – С. 22–27.
3. Бельский, В. А. О построении уравнений, эквивалентных уравнению Риккати в смысле совпадения отражающих функций / В. А. Бельский // Известия Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2008. – № 2. – С. 35–41.
4. Бельский, В. А. О полиномиальных возмущениях уравнения Абеля, не изменяющих отражающей функции / В. А. Бельский, В. И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4(9). – С. 79–85.
5. Бельский, В. А. О построении дифференциальных полиномиальных уравнений первого порядка, эквивалентных заданному в смысле совпадения отражающей функции / В. А. Бельский // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 13–20.
6. Бельский, В. А. О построении уравнений Абеля, эквивалентных уравнению Абеля вида $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$. / В. А. Бельский, В. И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2(11). – С. 55–61.
7. Бельский, В. А. О квадратичных дифференциальных системах с одинаковыми отражающими функциями / В. А. Бельский // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 12. – С. 1682–1686.
8. Бельский, В. А. Полиномиальные дифференциальные уравнения с одинаковыми отражающими функциями / В. А. Бельский // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2015. – № 3 (90). – С. 93–98.
9.

Материалы конференций

10. Бельский, В. А. О необходимых условиях эквивалентности дифференциальных уравнений / В. А. Бельский // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы X Респуб. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель,

12–14 марта 2007 г. / ГГУ им. Ф.Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 161–162.

11. Бельский, В. А. Уравнения Абеля с одинаковым оператором сдвига / В. А. Бельский // Актуальные проблемы научных исследований – 2007: материалы III Междун. научно-практич. конф.: в 7 т., Днепропетровск, 15–30 июня 2007 г. – Днепропетровск: Наука и образование, 2007. – Т. 7. Математика. Современные информационные технологии. Физика. Химия и химические технологии. Экология. – С. 5–7.

12. Бельский, В. А. О полиномиальных уравнениях, эквивалентных заданному уравнению / В. А. Бельский // // Актуальные проблемы научных исследований – 2008: материалы IV Междун. научно-практич. конф.: в 9 т., Прага, 15–31 января 2008 г. – Praha: Publishing House «Education and Science», 2008. – Т. 9. Математика. Физика. Современные информационные технологии. – С. 12–15.

Тезисы докладов

13. Бельский, В. А. Уравнения Риккати с одинаковыми отражающими функциями / В. А. Бельский // Еругинские чтения – XI: тез. докл. Междун. математич. конф., Гомель, 24–26 мая 2006 г. / Институт математики НАН Беларуси, БГУ. – Минск, 2006. – С. 37.

14. Бельский, В. А. Уравнения с полиномиальными правыми частями, имеющие одинаковый оператор сдвига вдоль решений / В. А. Бельский // Дифференциальные уравнения и топология: тез. докл. Междун. конф., посвященной 100-летию со дня рожд. Л.С. Понтрягина, Москва, 17–22 июня 2008 г. / Математ. ин-т им. В.А. Стеклова РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова. – М, 2008. – С. 98–99.

15. Бельский, В. А. Полиномиальные дифференциальные уравнения с одинаковыми отражающими функциями / В. А. Бельский // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междун. науч. конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г.: в 2 ч. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2008. – Ч. 2. – С. 6–7.

16. Бельский, В. А. Об эквивалентности дифференциальных систем с полиномиальными правыми частями / В. А. Бельский // Еругинские чтения – 2009: тез. докл. XIII Междун. науч. конф. по диф. уравнениям, Пинск, 26–29 мая 2009 г. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2009. – С. 25–26.

17. Бельский, В. А. О квадратичных дифференциальных системах, эквивалентных стационарным / В. А. Бельский // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тез. докл. Междун. науч. конф., Минск, 7–10 декабря 2010 г. / Институт математики НАН Беларуси, БГУ. – Минск, 2010. – С. 25–26.

18. Бельский, В. А. О построении полиномиальных дифференциальных уравнений первого порядка с одинаковой отражающей функцией / В. А. Бельский // Еругинские чтения – 2011 : тез. докл. XIV Междун. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 12–14 мая 2011 г. / Институт математики НАН Беларуси, Полоцк. гос. ун-т. – Новополоцк, 2011. – С. 40–41.

РЭЗЮМЭ

Бельскі Вадзім Аляксеявіч
Палінаміяльныя дыферэнцыяльныя раўнанні і сістэмы з аднолькавымі адлюстроўваючымі функцыямі

Ключавыя словы: адлюстраванне Пуанкаре, адлюстроўваючая функцыя, дыферэнцыяльнае раўнанне, квадратычнай сістэма, краявая задача, палінаміяльнае ўзбуджэнне, перыядычнае рашэнне, ўстойлівасць.

Мэта даследвання. Мэтай сапраўднай працы з'яўляецца распрацоўка спосабаў даследавання полінаміяльных дыферэнцыяльных раўнанняў і сістэм на падставе ўстанаўлення іх эквівалентнасці іншым сістэмам.

Метады даследавання. Выкарыстоўваецца метад адлюстроўваючай функцыі.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

– атрыманы неабходныя, а таксама дастатковыя ўмовы эквівалентнасці у сэнсе супадзення адлюстроўваючых функцый двух раўнанняў Абеля (двух раўнанняў Рыкаці). У прыватнасці, неабходныя і дастатковыя ўмовы эквівалентнасці названых раўнанняў раўнаннях такога ж выгляду з падзяляючымі зменнымі;

– распрацаваны спосаб апісання класаў дыферэнцыяльных палінаміяльных раўнанняў з аднолькавай адлюстроўваючай функцыяй, што атрымліваюцца палінаміяльнымі ўзбуджэннямі зыходных раўнанняў;

– распрацаваны алгарытм, які дазваляе ўсталяваць эквівалентнасць зададзенай квадратычнай сістэмы другога парадку і стацыянарнай трохкутнай сістэмы.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Вынікі дысертацыі могуць быць ужытыя ў тэорыі ваганняў, пры вывучэнні матэматычных мадэляў экалагічных сістэм, а таксама могуць быць выкарыстаны пры чытанні спецыяльных курсаў па якаснай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў.

РЕЗЮМЕ

Бельский Вадим Алексеевич
Полиномиальные дифференциальные уравнения и системы с одинаковыми отражающими функциями

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, квадратичная система, краевая задача, отображение Пуанкаре, отражающая функция, периодическое решение, полиномиальное возмущение, устойчивость.

Цель исследования. Целью настоящей работы является разработка способов исследования полиномиальных дифференциальных уравнений и систем на основании установления их эквивалентности другим системам в смысле совпадения отражающих функций.

Методы исследования. Используется метод отражающей функции.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

– получены необходимые, а также достаточные условия эквивалентности в смысле совпадения отражающих функций двух уравнений Абеля (двух уравнений Риккати). В частности, условия эквивалентности указанных уравнений уравнениям такого же вида с разделяющимися переменными;

– разработан способ описания классов дифференциальных полиномиальных уравнений с одинаковой отражающей функцией, получаемых полиномиальными возмущениями исходных уравнений. В частности, доказано, что для двух эквивалентных в смысле совпадения отражающих функций полиномиальных уравнений с разными степенями существует линейное уравнении, эквивалентное им обоим;

– разработан алгоритм, позволяющий установить совпадение отражающих функций у квадратичной дифференциальной системы второго порядка и стационарной треугольной системы.

Рекомендации по использованию. Результаты диссертации могут быть применены в теории колебаний, при изучении математических моделей экологических систем, а также могут быть использованы при чтении специальных курсов по качественной теории дифференциальных уравнений.

SUMMARY

Vadim A. Belsky
Polynomial differential equations and systems with the same reflective functions

Keywords: boundary value problem, differential equation, periodic solution, Poincare mapping, polynomial perturbation, quadratic system, reflecting function, stability.

The purpose of the research. The aim of this work is to develop methods for studying polynomial differential equations and systems on the basis of establishing their equivalence to other systems.

Research methods. The method of reflective function is used.

The results obtained and their novelty. The followings new results are obtained in dissertation:

– the necessary and sufficient conditions of equivalence of two equations of Abel (two equations of Riccati) are obtained. In particular the necessary and sufficient conditions for the existence of the equivalent Abel (Riccati) equation with separable variables for the given equation Abel (Riccati) are obtained as well;

– the method for describing classes of differential polynomial equations with common reflecting function obtained by polynomial perturbations of the initial equations, is developed. In particular, it is proved that for two polynomial equations with the same reflective function and with different degrees of polynomials, there is a linear equation, which is equivalent to both of them;

– algorithm for checking the coincidence of reflecting functions for quadratic non-stationary system and a stationary triangular system is elaborated.

Recommendations for use. The results of the dissertation can be applied to the theory of oscillations, and can also be used when reading special courses on the qualitative theory of differential equations.